V.V. Amelkin

ECUACIONES DIFERENCIALES en la PRÁCTICA

- ¿NECESITAN LOS INGENIEROS LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD?
- MOVIMIENTO PLANETARIO
- EFICACIA DE LA PUBLICIDAD
- MODELOS DIFERENCIALES EN ECOLOGÍA
- LA LEY DE LA OFERTA Y LA DEMANDA
- MODELOS DE OPERACIONES MILITARES

URSS

Serie de divulgación científica Matemática

3

Научно-популярная серия Математика

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

V. V. Amelkin

ECUACIONES DIFERENCIALES en la PRÁCTICA

Traducido del ruso por
el doctor en Ciencias Físico-matemáticas
Jairo Correa Rodríguez

bajo la dirección de
Guillermo Peña Feria

Moscú • 2003

URSS

www.FreeLibros.me

ББК 22.161.6я73, 22.311

Амелькин Владимир Васильевич

Дифференциальные уравнения в приложениях

Amelkin Vladímir Vasíllievich

Ecuaciones diferenciales en la práctica

Traducido de la edición rusa

El libro describe de un modo sencillo las posibilidades de aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias al estudio de fenómenos y procesos reales. Los métodos de construcción de las ecuaciones diferenciales y de su análisis cualitativo se ilustran mediante problemas que abarcan las más diversas ramas del saber.

Director	*Domingo Marín Ricoy*
Director financiero	*Viktoria Malishenko*
Director de sistemas	*Víktor Románov*
Director de producción	*Irina Makiéeva*
Director comercial	*Natalia Finoguiénova*
Traducción	*Guillermo Peña Feria y Jairo Correa Rodríguez*

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 11.07.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 2000 экз. Печ. л. 15.

Отпечатано в ООО «Политрейд». 113054, г. Москва, Стремянный пер., д. 10, стр. 1.

Editorial URSS
Libros de ciencia
Tel./fax: 7 (095) 135-44-23
Tel./fax: 7 (095) 135-42-46
E-mail: urss@urss.ru
Catálogo en *Internet*: http://urss.ru

ISBN 5-354-00443-8

© Original: V. V. Amelkin, 1987, 2003
© Edición en español:
Editorial URSS, 2003
© Diseño de texto y encuadernación:
Editorial URSS, 2003

Reservados todos los derechos en todos los idiomas y en todos los países del mundo. Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

www.FreeLibros.me

Índice

Prólogo 5

Capítulo 1
Construcción y solución de modelos diferenciales 9

1. ¿Cuál café está más caliente? 11
2. Flujo estacionario de calor 14
3. Muerte en la reserva 17
4. Fuga de un líquido por un orificio. Reloj de agua 24
5. Eficacia de la publicidad 27
6. Oferta y demanda 29
7. Reacciones químicas 31
8. Modelos diferenciales en ecología 34
9. Un problema de la teoría matemática de epidemias 40
10. Curva del perro (curva de persecución) 47
11. Modelos de operaciones militares 50
12. ¿Por qué los relojes de péndulo no son exactos? 63
13. Reloj cicloidal 66
14. Problema de la braquistocrona 73
15. Media aritmética, media geométrica y ecuaciones diferenciales 78
16. Vuelo parabólico 82
17. Ingravidez o gravedad cero 85

www.FreeLibros.me

18. Leyes de Kepler del movimiento planetario 89
19. Flexión de una viga 100
20. Transporte de madera 105

Capítulo 2
Métodos cualitativos de análisis de modelos diferenciales **117**

1. Curvas a lo largo de las cuales la dirección de la aguja magnética no varía 119
2. ¿Necesitan los ingenieros los teoremas de existencia y unicidad? 124
3. Interpretación dinámica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden 134
4. Sistemas mecánicos conservativos 139
5. Estabilidad de los puntos de equilibrio y de los movimientos periódicos 150
6. Funciones energéticas 156
7. Estados simples de equilibrio 160
8. Movimiento en un medio con rozamiento lineal 165
9. Flujo adiabático en una tobera 171
10. Puntos de equilibrio de orden superior 177
11. Inversión y coordenadas homogéneas 182
12. Flujo de un gas ideal en un conducto rotatorio de diámetro constante 186
13. Trayectorias cerradas aisladas 197
14. Regímenes periódicos en circuitos eléctricos 207
15. Curvas sin contacto 215
16. Sistema topográfico de curvas. Curvas de contacto 217
17. Divergencia del campo vectorial y ciclos límites 223

Apéndice **228**

Índice de materias **233**

www.FreeLibros.me

Prólogo

Uno de los conceptos matemáticos más importantes es el de ecuación diferencial. A partir de una ecuación diferencial se pueden hallar funciones cuyas derivadas (o diferenciales) satisfacen ciertas condiciones preestablecidas. Una ecuación diferencial obtenida como resultado de la investigación de un fenómeno o proceso real cualquiera, se llama *modelo diferencial* del fenómeno o proceso. Es claro que los modelos diferenciales son casos particulares del conjunto de todos los modelos matemáticos que pueden construirse al estudiar el mundo que nos rodea. Debemos subrayar que los modelos diferenciales tienen su propia clasificación. Nosotros examinaremos únicamente los modelos diferenciales representados por las llamadas *ecuaciones diferenciales ordinarias*, las cuales se caracterizan por el hecho de que las funciones incógnitas presentes en ellas dependen de una sola variable.

Al construir los modelos diferenciales ordinarios (y no sólo ellos) es de gran importancia, y a veces tiene un valor primordial, el conocimiento de las leyes propias de la rama de la ciencia con la cual está relacionado el problema examinado. Por ejemplo, en la mecánica tales leyes pueden ser las leyes de Newton; en la teoría de circuitos eléctricos, las leyes de Kirchhoff; en la teoría de las reacciones químicas, la ley de acción de masas; etcétera.

www.FreeLibros.me

Por supuesto, en la práctica se suelen presentar problemas para los que no se conocen leyes que permitan construir las ecuaciones diferenciales que los describen. En esos casos, una alternativa es recurrir a suposiciones (hipótesis) sobre el comportamiento del proceso para variaciones pequeñas de los parámetros (variables) que lo determinan. Pasando posteriormente al límite se llega a una ecuación diferencial. Si al actuar de esta manera los resultados obtenidos del análisis de la ecuación diferencial concuerdan con los datos experimentales, entonces se puede afirmar que las hipótesis hechas sobre el problema inicial reflejan correctamente su estado real [1].

Al elaborar este libro, el autor se fijó dos objetivos. El primero es mostrar mediante ejemplos tomados de diferentes ramas de la ciencia (ejemplos con contenido y no meramente ilustrativos) las posibilidades del empleo de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el estudio de la realidad que nos rodea. Claro está, los ejemplos examinados están lejos de abarcar todo el conjunto de preguntas que se pueden contestar utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero, en primer lugar, "nadie puede abarcar lo inabarcable", y en segundo, las situaciones analizadas aquí ya dan una idea del papel que desempeñan las ecuaciones diferenciales ordinarias en la resolución de problemas prácticos.

El segundo objetivo es dar a conocer al lector las técnicas y métodos más simples de investigación de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En realidad, nos referimos a las técnicas y métodos propios

---

[1] Un estudio pormenorizado de modelos matemáticos se puede encontrar en los cautivantes libros de A. N. Tijonov y D. P. Kostomárov "Relatos de matemática aplicada", Moscú, 1979 (en ruso) y de N. N. Moisiéev "La matemática hace un experimento", Moscú, 1979 (en ruso).

www.FreeLibros.me

de *la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales*, pues, salvo en algunos casos, casi nunca es posible resolver un ecuación diferencial en *forma cerrada*, es decir, obtener su solución en forma analítica mediante un número finito de operaciones elementales con funciones, ¡aun sabiendo que la ecuación diferencial tiene solución! Dicho de otro modo, entre la gran variedad de ecuaciones diferenciales muchas de ellas no poseen soluciones representables en forma cerrada por medio de un número finito de operaciones analíticas. Esta situación es semejante a la que se observa en la teoría de las ecuaciones con polinomios algebraicos: las soluciones de las ecuaciones algebraicas de primer y segundo grados se pueden obtener fácilmente en radicales; incluso las soluciones de las ecuaciones de tercer y cuarto grados pueden ser expresadas en radicales, pero las fórmulas ya son muy complicadas; en cuanto a las ecuaciones algebraicas de grado mayor que cuatro, sus soluciones no se pueden, en general, obtener en radicales.

Regresando a las ecuaciones diferenciales, subrayemos el hecho de que el empleo de series infinitas de uno u otro tipo permiten resolver una cantidad considerablemente mayor de ecuaciones que los métodos analíticos. Desafortunadamente, con mucha frecuencia las propiedades esenciales y más interesantes de las soluciones no se pueden "sacar a la luz" cuando están representadas mediante series de este tipo. Es más, en muchos casos, cuando se logra resolver la ecuación diferencial en forma cerrada, la solución resulta tan complicada que no es susceptible de análisis.

Lo anterior evidencia la necesidad de utilizar métodos y técnicas que permitan obtener la información necesaria sobre tales o cuales propiedades de las soluciones sin tener que resolver las ecuaciones diferenciales correspondientes. Pues bien, dichos métodos y técnicas existen, ellos constituyen el contenido de la teoría cualitativa de las

www.FreeLibros.me

ecuaciones diferenciales, en cuya base están los teoremas generales de existencia y unicidad de las soluciones, y los teoremas sobre la dependencia continua de las soluciones respecto a las condiciones iniciales. En la sección "¿Necesitan los ingenieros los teoremas de existencia y unicidad?" se habla del papel que desempeñan los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones. En lo referente a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias en general, iniciada a finales del siglo XIX con los trabajos de H. Poincaré y A. M. Liapunov, hoy sigue desarrollándose intensamente, y sus métodos se usan ampliamente en el estudio de la realidad circundante.

El autor expresa su gratitud a los profesores Iu. S. Bogdánov y M. V. Fedoriuk por sus consejos y observaciones útiles durante la elaboración del libro.

V. V. Amelkin

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 1

Construcción y solución de modelos diferenciales

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

1. ¿Cuál café está más caliente?

Anatoli y Vladímir llegaron a una cafetería y pidieron café y crema de leche. Tan pronto les sirvieron el pedido, Anatoli agregó al café un poco de crema, cubrió la taza con una servilleta de papel y salió a hacer una llamada telefónica. A diferencia de Anatoli, Vladímir tapó su taza con una servilleta y al cabo de 10 minutos, cuando regresó Anatoli, agregó al café la misma cantidad de crema que Anatoli; y ambos comenzaron a tomar café. ¿Quién tomó el café más caliente?

Resolvamos el problema partiendo de un conjunto de suposiciones naturales que reflejan la esencia física de los procesos ocurridos: vamos a considerar que el intercambio de calor a través de las superficies de la mesa y de la servilleta es mucho menor que el intercambio de calor a través de las paredes de las tazas, y que la temperatura del vapor en la taza es igual a la temperatura del líquido.

Deduzcamos primero la expresión que describe cómo varía con el tiempo la temperatura del café en la taza de Vladímir antes de ponerle crema.

En virtud de las suposiciones hechas, la cantidad de calor que el aire obtiene de la taza de Vladímir está dada por la fórmula

www.FreeLibros.me

$$dQ = \eta \frac{T - \theta}{l} s \, dt, \tag{1}$$

donde T es la temperatura del café en el instante t, θ es la temperatura del aire en la cafetería, η es la conductividad de calor del material de la taza, l es el grosor de la pared de la taza y s, el área de la superficie lateral de la taza. Por otra parte, la cantidad de calor que entrega el café se determina por la fórmula

$$dQ = -cm \, dT, \tag{2}$$

donde c y m son, respectivamente, el calor específico y la masa del café en la taza. Comparando las ecuaciones (1) y (2), llegamos a la ecuación

$$\eta \frac{T - \theta}{l} s \, dt = -cm \, dT,$$

o, separando las variables,

$$\frac{dT}{T - \theta} = -\frac{\eta s}{lcm} \, dt. \tag{3}$$

Si denotamos con T_0 la temperatura inicial del café e integramos la ecuación (3), hallamos

$$T = \theta + (T_0 - \theta) \exp\left\{-\frac{\eta s}{lcm} t\right\}. \tag{4}$$

La fórmula (4) constituye la expresión analítica de la ley de variación de la temperatura del café de Vladímir antes de mezclarlo con la crema.

www.FreeLibros.me

Busquemos ahora la ley de variación de la temperatura del café de Vladímir después de agregarle la crema. Con este fin, valgámonos de la ecuación del balance térmico. En nuestro caso tenemos

$$cm(T - \theta_V) = c_1 m_1(\theta_V - T_1), \tag{5}$$

donde θ_V es la temperatura de la mezcla en el instante t, T_1 es la temperatura de la crema, c_1 es el calor específico de la crema, y m_1 es la masa de la crema agregada al café.

De la ecuación (5) hallamos

$$\theta_V = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T. \tag{6}$$

Teniendo en cuenta la igualdad (4), la expresión (6) adopta la forma

$$\theta_V = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} \left[\theta + (T_0 - \theta) \exp\left\{ -\frac{\eta s}{lcm} t \right\} \right]. \tag{7}$$

La fórmula (7) representa la ley de variación de la temperatura del café de Vladímir después de ponerle crema.

Para deducir la ley de variación de la temperatura del café en la taza de Anatoli, utilicemos nuevamente la ecuación del balance térmico:

$$cm(T_0 - \theta_0) = c_1 m_1(\theta_0 - T_1), \tag{8}$$

donde θ_0 es la temperatura de la mezcla. De la igualdad (8) obtenemos

$$\theta_0 = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0.$$

www.FreeLibros.me

Haciendo la temperatura inicial igual a θ_0 en la ecuación (4), y el producto cm igual a la suma $cm + c_1 m_1$, obtenemos la ley de variación de la temperatura θ_A del café en la taza de Anatoli:

$$\theta_A = \theta + \left(\frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0 - \theta \right) \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{\eta s}{l(cm + c_1 m_1)} t \right\}. \qquad (9)$$

Para responder a la pregunta planteada en el problema sólo nos queda recurrir a las fórmulas (7) y (9) y efectuar los cálculos respectivos teniendo en cuenta que $c_1 \approx 3{,}9 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$, $c \approx 4{,}1 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$, $\eta \approx 0{,}6 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}$, y tomando, por ejemplo, $m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ kg, $m = 8 \cdot 10^{-2}$ kg, $T_1 = 20^\circ$ C, $\theta = 20^\circ$ C, $T_0 = 80^\circ$ C, $s = 11 \cdot 10^{-3}$ m^2 y $l = 2 \cdot 10^{-3}$ m. Los cálculos muestran que Anatoli tomó el café más caliente que Vladímir.

2. Flujo estacionario de calor

Comencemos por recordar que se habla de *flujo estacionario de calor* cuando la temperatura en cualquier punto de un cuerpo no varía con el tiempo.

En la resolución de problemas relacionados con los flujos de calor, las denominadas *superficies isotérmicas* desempeñan un papel sustancial. Para aclarar qué es una superficie isotérmica consideremos, por ejemplo, un tubo conductor de calor (fig. 1) de 20 cm de

www.FreeLibros.me

diámetro fabricado de un material homogéneo y protegido por un recubrimiento de magnesio de 10 cm de espesor. Supongamos que la temperatura del tubo es igual a 160° C y la del recubrimiento exterior es igual a 30° C. Intuitivamente es claro que existe una superficie (su sección se muestra en la figura 2 con una línea discontinua) en cada punto de la cual la temperatura es la misma, digamos, igual a 95° C. La curva discontinua de la figura 2 se llama *curva isotérmica*, y la superficie correspondiente, *superficie isotérmica*. En general, las curvas isotérmicas pueden tener formas muy variadas, debido, en particular, al carácter no estacionario del flujo de calor y a la heterogeneidad del material. En el caso examinado aquí, las curvas (superficies) isotérmicas son circunferencias concéntricas (cilindros concéntricos).

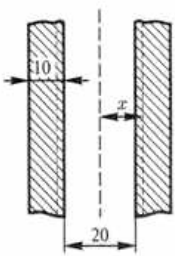

Fig. 1

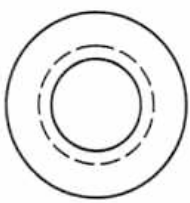

Fig. 2

Obtengamos la ley de distribución de la temperatura en el interior del recubrimiento y hallemos la cantidad de calor liberado durante 24 horas por un tramo de tubo de 1 m de longitud, sabiendo que el coeficiente de conductividad calorífica es $k = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Valgámonos de la ley de conducción de calor de Fourier, según la cual *la cantidad de calor liberada en una unidad de tiempo por un cuerpo que se encuentra en estado térmico invariable y cuya temperatura T*

www.FreeLibros.me

en cada punto depende solamente de una coordenada x está dada por la fórmula

$$Q = -kF(x)\frac{dT}{dx} = \text{const}, \tag{10}$$

donde $F(x)$ es el área de la sección perpendicular a la dirección de propagación del calor, y k es el coeficiente de conductividad calorífica.

De las condiciones del problema se deduce que $F(x) = 2\pi x l$, donde l es la longitud del tubo en centímetros y x es el radio de la base del cilindro interior. A partir de la fórmula (10), llegamos a las igualdades

$$\int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0{,}00017 \cdot 2\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}, \tag{11}$$

$$\int_{160}^{T} d\tau = -\frac{Q}{0{,}00017 \cdot 2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{12}$$

Calculando las integrales (11) y (12), obtenemos

$$\frac{160 - T}{130} = \frac{\ln 0{,}1x}{\ln 2} = \frac{\lg 0{,}1x}{\lg 2},$$

de donde

$$T = 591{,}8 - 431{,}8 \lg x.$$

Esta última fórmula es la ley de distribución de la temperatura en el interior del recubrimiento. Como vemos, la longitud del tubo no tiene ninguna importancia.

www.FreeLibros.me

Para responder a la segunda pregunta recurramos a la ecuación (11). Para $l = 100$ cm resulta

$$Q = \frac{130 \cdot 0{,}00017 \cdot 2\pi \cdot 100}{\ln 2}\ \mathrm{J} = \frac{200\pi \cdot 130 \cdot 0{,}00017}{0{,}69315}\ \mathrm{J},$$

por lo cual la cantidad de calor liberada durante 24 horas es igual a $24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot Q = 726\ 852$ J.

3. Muerte en la reserva

Durante una ronda de inspección por una reserva, dos guardabosques descubrieron el cadáver de un jabalí. Un examen preliminar permitió concluir que el animal falleció instantáneamente a causa de un balazo de un cazador furtivo. Sospechando que el cazador debía regresar a recoger su presa, los guardas decidieron esperarlo escondidos no lejos del lugar del crimen. Al poco tiempo aparecieron dos sujetos y se dirigieron sin rodeos hacia el jabalí. Al ser detenidos, los desconocidos negaron rotundamente su participación en el delito. Aunque los guardabosques tenían pruebas indirectas de su culpabilidad, para obtener una prueba fehaciente era necesario determinar el instante exacto en que el jabalí fue muerto.

Por fortuna, ese instante se logró calcular utilizando la ley de radiación de calor. Mostremos los posibles modos de razonamiento aplicables en este caso.

Conforme a ley de radiación de calor, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el medio ambiente es proporcional a la diferencia

www.FreeLibros.me

entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio:

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - a), \tag{13}$$

donde x es la temperatura del cuerpo en el instante t, a es la temperatura del medio ambiente y k es un factor positivo de proporcionalidad.

La solución del problema se puede obtener a partir del análisis de la integral de la ecuación diferencial (13). Al integrar no se debe olvidar que, después de muerto el jabalí, la temperatura del aire bien pudo permanecer invariable, bien pudo cambiar con el transcurso del tiempo. En el primer caso, la ecuación (13) es una ecuación diferencial de variables separables que se puede integrar fácilmente:

$$\ln \frac{x - a}{x_0 - a} = -kt, \quad x \neq a, \tag{14}$$

donde x_0 es la temperatura del cuerpo en el instante $t = 0$. Si en el instante en que fueron detenidos los sospechosos la temperatura x del cuerpo del jabalí era igual a 31° C y pasada una hora era igual a 29° C, entonces, considerando que en el instante del disparo $x = 37°$ C y $a = 21°$ C, y tomando el instante del arresto como $t = 0$ es posible determinar el momento del disparo. De hecho, utilizando los datos disponibles, de la igualdad (14) resulta

$$k = \ln \frac{31 - 21}{29 - 21} = \ln 1{,}25 = 0{,}22314. \tag{15}$$

Sustituyendo ahora en la fórmula (14) el valor de k de la igualdad (15) y el valor $x = 37$, hallamos

www.FreeLibros.me

$$t = -\frac{1}{0{,}22314} \ln \frac{37-21}{31-21} = -\frac{1}{0{,}22314} \ln 1{,}6 = -2{,}10630.$$

Así, entre el instante del disparo y el instante en que fueron detenidos los sospechosos transcurrieron 2 horas y 6 minutos.

En el caso cuando la temperatura del aire varía con el tiempo, la ley (13) de enfriamiento del cuerpo se convierte en la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$\frac{dx}{dt} + kx = ka(t), \tag{16}$$

donde $a(t)$ es la temperatura del aire en el instante t.

Para ilustrar uno de los métodos de determinación del instante en que fue muerto el jabalí, hagamos algunas conjeturas: en el instante de la detención de los sospechosos la temperatura del cuerpo del jabalí era igual a 30° C; el día del acontecimiento la temperatura del aire descendió cada hora después del mediodía en 1° C y era igual a 0° C en el instante del hallazgo del cadáver; finalmente, supongamos que al cabo de una hora de ser detectado el animal, su temperatura bajó hasta 25° C. Tomando $t = 0$ como el instante del disparo, asumiendo que entonces la temperatura corporal del jabalí era $x_0 = 37°$ C y denotando con t^* el instante en que los guardabosques descubrieron el cadáver, obtenemos $a(t) = t^* - t$.

Integrando ahora la ecuación (16), hallamos

$$x = \left(37 - t^* - \frac{1}{k}\right) e^{-kt} + t^* - t + \frac{1}{k}.$$

www.FreeLibros.me

Teniendo en cuenta que $x = 30$ para $t = t^*$, y que $x = 25$ para $t = t^* + 1$, de la última expresión obtenemos las igualdades

$$\left(37 - t^* - \frac{1}{k}\right) e^{-kt^*} + \frac{1}{k} = 30,$$
$$\left(37 - t^* - \frac{1}{k}\right) e^{-k(t^*+1)} + \frac{1}{k} = 26,$$

y a partir de éstas, la siguiente ecuación respecto a k:

$$\left(30 - \frac{1}{k}\right) e^{-k} - 26 + \frac{1}{k} = 0. \tag{17}$$

A la ecuación (17) se puede llegar partiendo de otras premisas. En efecto, sea $t = 0$ el instante de la detección del cadáver. Entonces $a(t) = -t$ y llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + kx = -kt \tag{18}$$

(con la condición inicial $x_0 = 30$ para $t = 0$), de la cual hay que despejar x.

Resolviendo la ecuación (18), obtenemos

$$x = \left(30 - \frac{1}{k}\right) e^{-kt} - t + \frac{1}{k}. \tag{19}$$

Haciendo $t = 1$ y $x = 25$ en la ecuación (19), llegamos a la ecuación (17).

www.FreeLibros.me

Aunque, como se sabe, la ecuación (17) no se puede resolver algebraicamente respecto a k, podemos resolverla fácilmente utilizando métodos numéricos de aproximación de raíces de ecuaciones trascendentes, digamos, el método de aproximaciones sucesivas de Newton. El método de Newton, al igual que otros métodos de aproximaciones sucesivas, parte de una estimación inicial de la raíz exacta para obtener aproximaciones más precisas. El procedimiento continúa hasta lograr el grado de precisión requerido.

Para mostrar cómo se emplea el método de Newton, transformemos la ecuación (17) en

$$30k - 1 + (1 - 26k)e^k = 0, \tag{20}$$

y la ecuación (19), después de tomar $x = 37$, toma la forma

$$(37k - 1 + kt)e^{kt} - 30k + 1 = 0. \tag{21}$$

Las ecuaciones (20) y (21) pertenecen al tipo de ecuaciones

$$(ax + b)e^{\lambda x} + cx + d = 0. \tag{22}$$

Si denotamos con $\varphi(x)$ el primer miembro de la ecuación (22) y derivamos dos veces consecutivas respecto a x, resulta

$$\varphi'(x) = (\lambda ax + \lambda b + a)e^{\lambda x} + c,$$
$$\varphi''(x) = (\lambda^2 ax + \lambda^2 b + 2\lambda a)e^{\lambda x}.$$

Entonces el método de aproximación de Newton de cálculo de una raíz de la ecuación (22) consiste en que, si la i-ésima aproximación x_i

www.FreeLibros.me

cumple la desigualdad

$$\varphi(x_i)\varphi''(x_i) > 0,$$

entonces la aproximación siguiente x_{i+1} se calcula con la fórmula

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\varphi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Apliquemos el método de Newton a la ecuación (20) y calculemos una raíz con una precisión, por ejemplo, de 10^{-6}. Derivando el primer miembro $\varphi(k)$ respecto a k, resulta

$$\varphi'(k) = 30 - (25 - 26k)e^k.$$

Verificando directamente se comprueba que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) < 0$, $\varphi'(0) > 0$. Esto indica que la función φ crece en un entorno pequeño del origen de coordenadas y luego decrece hasta tomar un valor negativo para $k = 1$. De aquí se deduce que en el intervalo (0,1) existe una raíz de la ecuación $\varphi(k) = 0$.

Tomando como aproximación inicial $k_0 = 0{,}5$ y teniendo presente que $a = -26$, $b = 1$, $c = 30$, $d = -1$ y $\lambda = 1$, calculamos las aproximaciones sucesivas de la raíz k de la ecuación (20) en el intervalo (0,1), hasta alcanzar la precisión requerida. En la tabla siguiente se muestran los resultados de los cálculos [1].

---

[1] N. del T. En el original se elabora una rutina para el cálculo de la raíz utilizando la calculadora científica de bolsillo "ELEKTRONIKA BZ-34".

www.FreeLibros.me

n	k_n	$\varphi(k_n)$	$\varphi'(k_n)$	$\varphi''(k_n)$
0	0,500000	−5,784655	−32,651408	−105,5
1	0,322835	−1,525956	−16,118043	− 82,0
2	0,228162	−0,351424	− 8,859807	− 71,5
3	0,188497	−0,055194	− 6,103385	− 67,5
4	0,179453	−0,002747	− 5,497019	− 66,6
5	0,178953	−0,000008	− 5,463736	− 66,5
6	0,178952	0		

El último paso del proceso de resolución del problema consiste en sustituir el valor calculado de k ($k_6 \approx 0{,}178952$) en la ecuación (21) y resolverla respecto a t (el instante en que fue muerto el jabalí). Con el fin de aplicar el método de Newton a la ecuación (21) denotemos su primer miembro con $g(t)$. Haciendo $t_0 = -1$, $a = k$, $b = 37k - 1$, $c = 0$, $d = -30k + 1$, y $\lambda = k$, obtenemos la tabla

n	t_n	$g(t_n)$	$g'(t_n)$	$g''(t_n)$
0	−1,000000	0,1819720	0,963962	0,19
1	−1,188775	0,0035050	0,927054	0,19
2	−1,192557	0,0000010	0,926329	0,19
3	−1,192558	0,0000002	0,926329	0,19
4	−1,192558	−0,0000003		

De los resultados se deduce que el jabalí fue muerto aproximadamente 1 hora y 12 minutos antes de que los guardabosques lo encontraran.

www.FreeLibros.me

4. Fuga de un líquido por un orificio. Reloj de agua

Los dos problemas que se examinan a continuación ilustran la relación de sus contenidos físicos con la geometría.

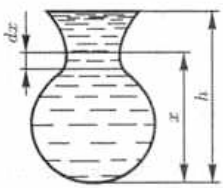

Fig. 3

Detengámonos previamente en el análisis de algunos aspectos teóricos generales. Consideremos un recipiente (fig. 3) donde el área de cualquier sección transversal es una función de la distancia entre la sección y el fondo del recipiente. Sea h la altura en metros del nivel del líquido en el recipiente en el instante inicial $t = 0$. Denotemos mediante $S(x)$ el área de la sección transversal en el punto x y con s el área de un orificio practicado en el fondo del recipiente.

Como se sabe, *la velocidad v de salida del líquido en el instante cuando la altura de su nivel es igual a x se determina mediante la igualdad $v = k\sqrt{2gx}$, donde $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y k es el coeficiente de la velocidad de salida del líquido por el orificio.*

En un intervalo infinitamente pequeño de tiempo dt, la salida del líquido se puede considerar uniforme, de modo que durante el tiempo dt sale una pequeña columna de líquido de altura $v\,dt$ y área de sección igual a s, provocando un descenso $-dx$ del nivel del líquido en el recipiente.

Como resultado de estos razonamientos obtenemos la ecuación diferencial

www.FreeLibros.me

$$ks\sqrt{2gx}\,dt = -S(x)\,dx, \tag{22}$$

que puede escribirse como

$$dt = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2gx}}\,dx. \tag{23}$$

Resolvamos ahora el problema siguiente. Un depósito cilíndrico de 6 m de altura y 4 m de diámetro descansa sobre su base. Supongamos que inicialmente el depósito está lleno de agua y se practica en su base un orificio circular de $\frac{1}{12}$ m radio. Se pide hallar cómo varía el nivel del agua en el depósito con el tiempo t, así como el tiempo que transcurre hasta que el depósito se vacía.

Por las condiciones del problema, $S(x) = 4\pi$ y $s = \frac{\pi}{144}$. Dado que para el agua $k = 0{,}6$, la ecuación (23) se convierte en

$$dt = -\frac{217{,}152}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Integrando, obtenemos la fórmula

$$t = 434{,}304\left(\sqrt{6} - \sqrt{x}\,\right) \quad (0 \leqslant x \leqslant 6),$$

la cual expresa la relación entre el nivel de agua y el tiempo t. Si en la última igualdad hacemos $x = 0$, obtenemos que el tiempo necesario para que el depósito se vacíe por completo es aproximadamente 18 minutos.

www.FreeLibros.me

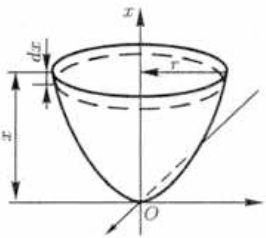

Fig. 4

Pasemos al segundo problema. Es sabido que la clepsidra (reloj de agua antiguo) es un sistema para medir el tiempo mediante el agua que sale por un pequeño orificio en el fondo de un recipiente (fig. 4). Las clepsidras se empleaban en los tribunales griegos y romanos para cronometrar los discursos de los abogados y así evitar intervenciones muy extensas. Determinar la forma que debe tener una clepsidra para que el nivel del agua en el recipiente descienda con velocidad constante.

Para resolver el problema utilizaremos la ecuación (23). Escribámosla de la manera siguiente:

$$\sqrt{x} = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2g}}\,\frac{dx}{dt}. \tag{24}$$

Suponiendo que el recipiente es una superficie de revolución, y ateniéndonos a las notaciones introducidas en la figura 4, a partir de la ecuación (24) obtenemos

$$\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2}{ks\sqrt{2g}}\,a, \tag{25}$$

donde $a = v_x = \dfrac{dx}{dt}$ es la proyección de la velocidad de la superficie libre del líquido sobre el eje x. Según las condiciones del problema dicha proyección es constante. Elevando al cuadrado ambos miembros

www.FreeLibros.me

en (25), llegamos a la ecuación

$$x = cr^4, \tag{26}$$

donde $c = \dfrac{a^2\pi^2}{2gk^2s^2}$. Esto indica que el reloj de agua tiene la forma de la superficie generada por la rotación de la curva (26) alrededor del eje x.

5. Eficacia de la publicidad

Una empresa comercial vende cierta mercancía B, sobre cuya existencia en el instante t están enterados solamente x de los N compradores potenciales. Con el fin impulsar las ventas de este producto la firma emprende una campaña publicitaria por radio y televisión. Posteriormente, muchos compradores potenciales se enteran de la existencia del producto por medio de otras personas. Con un grado alto de fiabilidad se puede afirmar que, como resultado de la campaña publicitaria, la velocidad de variación del número de personas que conocen el producto B es proporcional tanto al número de compradores que ya están enterados como al número de compradores que aún no lo están.

Si convenimos en medir el tiempo a partir del instante cuando, una vez iniciada la campaña publicitaria, la cantidad de personas que sabían de la existencia del producto era igual a $\dfrac{N}{\gamma}$, entonces obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \tag{27}$$

www.FreeLibros.me

con la condición inicial $x = \dfrac{N}{\gamma}$ para $t = 0$. En la ecuación (27), k es un coeficiente positivo de proporcionalidad. Integrando la ecuación (27) hallamos

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N - x} = kt + C.$$

Tomando $NC = C_1$, resulta la igualdad

$$\frac{x}{N - x} = Ae^{Nkt}, \quad \text{donde} \quad A = e^{C_1}.$$

Resolviendo esta última ecuación respecto a x, obtenemos

$$x = N \frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt} + 1} = \frac{N}{1 + Pe^{-Nkt}}, \tag{28}$$

donde $P = \dfrac{1}{A}$.

En la literatura de economía, la ecuación (28) se conoce con el nombre de *ecuación de la curva logística*.

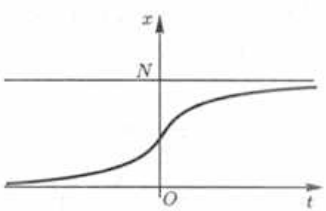

Fig. 5

Partiendo de las condiciones iniciales, la ecuación (28) se transforma en

$$x = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}.$$

En la figura 5 se muestra la curva logística para $\gamma = 2$. Con la ecuación (27) también se puede representar el problema de difusión de novedades tecnológicas.

www.FreeLibros.me

6. Oferta y demanda

La oferta y la demanda son categorías económicas de la producción de bienes y servicios, categorías que surgen y se desarrollan en el mercado, en la esfera del intercambio comercial. La demanda es la expresión en el mercado de la necesidad de mercancías y la oferta es el producto disponible o susceptible de ser conseguido en el mercado. Una de las leyes económicas de la producción de bienes y servicios es la *ley de la oferta y la demanda*, cuya esencia es la unidad de la oferta y la demanda y su tendencia objetiva a equilibrarse.

Veamos el problema siguiente. Supongamos que todos los domingos de una temporada suficientemente larga, un campesino va al mercado del pueblo a vender las manzanas recolectadas durante la semana. Si el inventario de manzanas es grande, la oferta semanal dependerá tanto del precio de venta esperado para la presente semana como de la variación pronosticada para las semanas siguientes. Digamos, se espera que esta semana el precio sea bajo y que en las siguientes aumente, entonces la oferta se mantendrá o disminuirá bajo la condición de que la subida esperada compense las pérdidas por no venta. Además, la oferta de la mercancía esta semana será tanto menor, cuanto mayor sea el aumento esperado del precio de venta en las semanas siguientes. Y viceversa, si esta semana se espera que el precio sea alto y que caerá luego, entonces la oferta aumentará tanto más cuanto mayor sea la disminución de precios esperada.

Si denotamos con p el precio de la fruta esta semana, y con p' la *tendencia* (la derivada del precio respecto al tiempo), entonces tanto la demanda como la oferta serán funciones de estas variables. Como muestra la práctica, las formas concretas de estas funciones dependen de muchos factores; en particular, la dependencia de la oferta y de la

www.FreeLibros.me

demanda respecto a p y p' puede ser lineal, es decir, puede tener la forma

$$y = ap' + bp + c,$$

donde a, b y c son ciertas constantes reales. Suponiendo, por ejemplo, que el precio inicial de la fruta era igual a 1 rublo por 1 kg, dentro de t semanas será $p(t)$ rublos por 1 kg, y las fórmulas para determinar el comportamiento de la demanda q y de la oferta s son

$$q = 4p' - 2p + 39,$$
$$s = 44p' + 2p - 1,$$

respectivamente, entonces para garantizar el equilibrio entre la demanda y la oferta, debe cumplirse la igualdad

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

De aquí llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{p - 10} = -\frac{1}{10}\,dt.$$

Integrando hallamos $p = Ce^{-t/10} + 10$. De la condición inicial ($p = 1$ para $t = 0$) resulta

$$p = -9e^{-t/10} + 10. \tag{29}$$

Resumiendo, si se quiere mantener todo el tiempo una situación de equilibrio entre la demanda y la oferta, es necesario que el precio varíe de acuerdo con la fórmula (29).

www.FreeLibros.me

7. Reacciones químicas

Las ecuaciones químicas muestran cómo se forma una sustancia (producto) a partir de otras sustancias (reactantes). Por ejemplo, la ecuación

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

muestra que el resultado de la reacción entre dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno es la obtención de dos moléculas de agua.

La forma general de una ecuación química es

$$aA + bB + cC + \ldots \rightarrow mM + nN + pP + \ldots,$$

donde $A, B, C, \ldots$ son los reactantes; $M, N, P, \ldots$ son las sustancias que se obtienen como resultado de la reacción química; y las constantes $a, b, c, \ldots, m, n, p, \ldots$ son enteros positivos que indican las *concentraciones* (número de moléculas) de las sustancias que intervienen en la reacción.

La magnitud que caracteriza el curso de una reacción con el tiempo se llama *velocidad de reacción*. Las concentraciones de los reactantes se miden en moles por unidad de volumen.

Una de las leyes fundamentales de la teoría de las velocidades de las reacciones químicas es la *ley de acción de masas*, según la cual *la velocidad de una reacción química, para un sistema homogéneo a temperatura constante, es proporcional al producto de las concentraciones de las sustancias reaccionantes.*

www.FreeLibros.me

Veamos cómo utilizar la ley de acción de masas en la resolución de un problema concreto de una reacción química. El resultado de la reacción de 10 litros de la sustancia A con 20 litros de la sustancia B es una nueva sustancia C. Supongamos que A, B y C son líquidos, que la temperatura durante la reacción permanece constante, y que la reacción de dos volúmenes de la sustancia A con un volumen de la sustancia B produce tres volúmenes de la sustancia C. Determinar la cantidad de sustancia C en un instante arbitrario t sabiendo que durante 20 minutos se forman 6 litros.

Representemos con x el volumen (en litros) de la sustancia C obtenida hasta el instante t (en horas). De las condiciones del problema se deduce que, al llegar al instante t, han reaccionado $\frac{2x}{3}$ litros de la sustancia A y $\frac{x}{3}$ litros de la sustancia B o, lo que es equivalente, aún quedan $10 - \frac{2x}{3}$ litros de A y $20 - \frac{x}{3}$ litros de B. Conforme con la ley de acción de masas

$$\frac{dx}{dt} = K\left(10 - \frac{2x}{3}\right)\left(20 - \frac{x}{3}\right),$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x),$$

donde k es una constante de proporcionalidad $\left(k = \frac{2K}{9}\right)$. Recordemos que en el instante inicial $t = 0$ la cantidad de sustancia C es $x = 0$, y en el instante $t = \frac{1}{3}$ se tiene $x = 6$.

www.FreeLibros.me

Partiendo de esta información, podemos plantear el llamado *problema de contorno*

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x),$$
$$x(0) = 0, \quad x\left(\frac{1}{3}\right) = 6.$$

Ante todo, integremos la ecuación diferencial y utilicemos la condición $x(0) = 0$ para obtener el valor de la constante de integración:

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4e^{45kt}$$

Ahora, para hallar el valor de la constante de proporcionalidad k, sustituimos los valores $x = 6$ y $t = \frac{1}{3}$ en esta última expresión. El resultado es $e^{15k} = \frac{3}{2}$. Por consiguiente,

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4\left(e^{15k}\right)^{3t} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}$$

o, despejando x,

$$x = 15\,\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}} \qquad (*)$$

La última igualdad representa la cantidad x de sustancia C formada hasta el instante t por la reacción de A y B.

www.FreeLibros.me

Hagamos una observación final. Partiendo de consideraciones prácticas se comprende que el volumen de sustancia C formado durante la reacción química de 10 litros de sustancia A y de 20 litros de sustancia B es finito. Al mismo tiempo, un análisis formal de la ecuación $(*)$ indica que existe un valor finito de t, concretamente cuando $\left(\frac{2}{3}\right)^{3t} = 4$, para el cual la variable x se hace infinitamente grande. No obstante, este hecho no contradice las consideraciones prácticas, pues la igualdad $\left(\frac{2}{3}\right)^{3t} = 4$ es posible únicamente si el tiempo t toma valores negativos, y las reacciones químicas tienen sentido sólo para $t \geqslant 0$.

8. Modelos diferenciales en ecología

La ecología estudia las relaciones entre los organismos vivos y su medio ambiente. Su objeto principal de estudio es la evolución de las poblaciones.

En esta sección analizaremos algunos modelos diferenciales de crecimiento y extinción de las poblaciones y otros modelos relacionados con la convivencia de organismos vivos en situaciones "depredador—presa"[2].

---

[2] *Murray J. D.* Some simple mathematical models in ecology // Math. Spectrum. 1983–1984. V. 16. № 2. P. 48–54.

www.FreeLibros.me

Sea $x(t)$ el número de individuos de cierta población en el instante t. Denotando con A y B, respectivamente, los números de individuos que nacen y mueren por unidad de tiempo, tendremos una base bastante sólida para afirmar que la velocidad de variación de x respecto al tiempo es

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{30}$$

El problema ahora consiste en establecer la dependencia de A y B respecto a x. El caso más simple se presenta cuando

$$A = ax, \quad B = bx, \tag{31}$$

donde a y b son la *tasa de natalidad* y la *tasa de mortalidad* por unidad de tiempo, respectivamente. Sustituyendo las expresiones de A y B de (31) en la ecuación diferencial (30), se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x. \tag{32}$$

Sea $x = x_0$ el número de individuos en el instante $t = t_0$. Entonces de la ecuación (32) sigue que

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

De esta igualdad se deduce que si $a > b$, entonces el número de individuos $x \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Por otra parte, si $a < b$, entonces $x \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, la población comienza extinguirse.

A pesar de que el modelo que acabamos de exponer es simplificado, en una serie de casos corresponde a la realidad. Sin embargo,

www.FreeLibros.me

prácticamente todos los modelos de fenómenos y procesos reales son no lineales, por lo que, en lugar de la ecuación (32), se hace necesario considerar ecuaciones de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función no lineal. Suponiendo, por ejemplo, que $f(x) = ax - bx^2$, tenemos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = ax - bx^2,$$

donde

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Dado que en el instante $t = t_0$ el tamaño de la población es $x = x_0$, se obtiene

$$x(t) = \frac{x_0 \dfrac{a}{b}}{x_0 + \left(\dfrac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{33}$$

En la igualdad (33) se ve que cuando $t \to \infty$, el tamaño de la población $x(t) \to \dfrac{a}{b}$. Ahora bien, se pueden dar los casos $\dfrac{a}{b} > x_0$ y $\dfrac{a}{b} < x_0$, cuyas diferencias se ilustran en la figura 6. Destaquemos que la igualdad (33) describe, en particular, el comportamiento de las poblaciones de algunos tipos de parásitos de las frutas y de ciertas clases de bacterias.

Examinemos un caso de coexistencia de especies. Específicamente, consideremos dos tipos de peces, grandes (depredadores) y pequeños

www.FreeLibros.me

(presas), donde los últimos sirven de alimento a los primeros. Si construimos la ecuación diferencial para cada clase, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

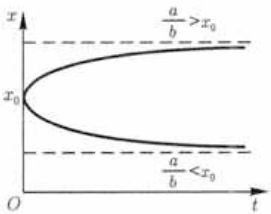

Fig. 6

Estudiemos con mayor detenimiento el llamado modelo "depredador—presa" para dos especies de peces. Este modelo fue estudiado por primera vez por Volterra para explicar las oscilaciones en la aparición de diferentes tipos de peces en el Mar Adriático, las cuales mostraban un mismo período, pero diferentes fases.

Denotemos con x el número de depredadores y con y la cantidad de presas. El número de depredadores crecerá mientras haya suficiente cantidad de alimento, o sea, de peces pequeños, pero al fin y al cabo llegará un momento cuando comience a escasear al alimento, y el número de peces grandes comenzará a disminuir. En este caso, el número de peces pequeños de nuevo crecerá, creándose así las condiciones para que el número de peces grandes vuelva a aumentar, y el ciclo se repetirá de nuevo. He aquí el modelo construido por Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \tag{34}$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dxy, \tag{35}$$

donde a, b, c, d son constantes positivas.

www.FreeLibros.me

En la ecuación (34) (para los peces grandes), el sumando bxy expresa la dependencia del aumento de la población de peces grandes respecto al tamaño de la población de peces pequeños. El sumando $-dxy$ de la ecuación (35) expresa la reducción del número de peces pequeños en función del número de peces grandes.

Simplifiquemos el aspecto de las ecuaciones (34) y (35) introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$u(\tau) = \frac{d}{c}x, \quad v(\tau) = \frac{b}{a}y, \quad \tau = ct, \quad \alpha = \frac{a}{c}.$$

Con estas notaciones las ecuaciones diferenciales (34) y (35) se convierten en

$$u' = \alpha u(v-1), \quad v' = v(1-u), \tag{36}$$

donde $\alpha > 0$, y la tilde indica la derivada respecto a τ.

Supongamos que en un instante determinado $\tau = \tau_0$ se conoce el número de ejemplares de ambas especies, es decir,

$$u(\tau_0) = u_0, \quad v(\tau_0) = v_0. \tag{37}$$

En el futuro nos interesarán solamente las soluciones positivas. Para revelar la relación entre u y v dividamos la primera ecuación del sistema (36) por la segunda e integremos la ecuación diferencial obtenida. El resultado es

$$\alpha v + u - \ln v^{\alpha} u = \alpha v_0 + u_0 - \ln v_0^{\alpha} u_0 = H,$$

www.FreeLibros.me

donde H es una constante determinada por las condiciones iniciales (37) y el parámetro α.

En la figura 7 se muestran los gráficos de u como función de v para diferentes valores de H. Obsérvese que las curvas en el plano (u, v) son cerradas. Supongamos ahora que a los valores iniciales u_0 y v_0 les corresponde el punto A en la trayectoria para el valor $H = H_3$. Puesto que $u_0 > 1$ y $v_0 < 1$, la primera ecuación del sistema (36) muestra que inicialmente la variable u decrece. Un hecho análogo tiene lugar para la variable v. Luego, cuando la variable u se hace igual a la unidad, $v' = 0$, y después en el transcurso de un tiempo prolongado τ la variable v crece. Y viceversa, cuando $v = 1$, $u' = 0$ y la variable u comienza a crecer. De esta manera, tanto la variable u como la variable v describen trayectorias cerradas, lo que significa que las soluciones son funciones periódicas respecto al tiempo. Además, los puntos de máximo de u y v no coinciden, es decir, las oscilaciones de las poblaciones de peces

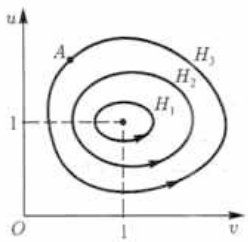

Fig. 7

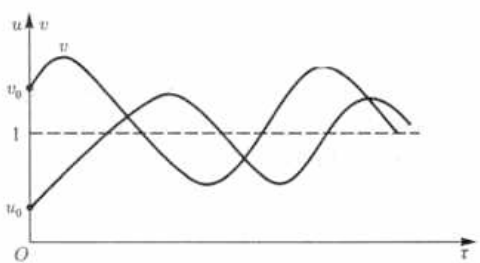

Fig. 8

www.FreeLibros.me

grandes y peces pequeños tienen fases diferentes. La figura 8 muestra un gráfico típico de la dependencia de u y v respecto al tiempo τ (en el caso $v_0 > 1$, $u_0 < 1$).

A modo de conclusión, subrayemos que el estudio de comunidades con interrelaciones más complejas conduce a resultados prácticos más interesantes. Así, por ejemplo, si dos poblaciones compiten por una misma fuente de alimentación (una tercera población), se puede mostrar que una de las especies tiende a extinguirse. Bajo estas condiciones es claro que si la población que se extingue es la fuente de alimentación, entonces las otras dos especies correrán la misma suerte.

9. Un problema de la teoría matemática de epidemias

Analicemos un modelo diferencial de la teoría de epidemias. Supongamos que en cierta población de tamaño N se distinguen tres grupos: el primer grupo está formado por los individuos sanos, pero susceptibles de adquirir cierta enfermedad contagiosa. Sea $S(t)$ el número de tales individuos en el instante t. El segundo grupo lo conforman los individuos infectados, o sea, aquéllos individuos que están enfermos y son fuente de propagación de la enfermedad. Denotemos con $I(t)$ el número de tales individuos en el instante t. Finalmente, el tercer grupo lo constituyen los individuos sanos que tienen inmunidad contra la enfermedad dada. Utilicemos el símbolo $R(t)$ para representar su número en el instante t. De tal manera,

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \tag{38}$$

www.FreeLibros.me

Hagamos varias suposiciones que, si bien simplifican la situación real, en muchos casos reflejan la esencia de los acontecimientos. Asumamos, por ejemplo, que cuando el número de individuos infectados excede cierto número fijo I^*, la velocidad de variación del número de individuos susceptibles a la enfermedad en el instante t es proporcional a su número en el instante t. Vamos a considerar que la velocidad de variación del número de individuos infectados, pero convalecientes, es proporcional al número de individuos infectados. En relación con la primera suposición, consideremos que cuando el número de individuos infectados es $I(t) > I^*$, éstos son capaces de contagiar a los individuos propensos a la enfermedad. Lo último significa que aceptamos el hecho de un posible aislamiento (hasta cierto momento) de los individuos contagiados (mediante cuarentena o manteniéndolos lejos de los individuos propensos al contagio). Con estas restricciones llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{si} \quad I(t) > I^*, \\ 0 & \text{si} \quad I(t) \leqslant I^*. \end{cases} \tag{39}$$

Ahora, puesto que cada individuo susceptible de contagio, el cual al fin y al cabo contrae la infección, se convierte en agente transmisor de la enfermedad, entonces la velocidad de variación del número de individuos infectados es la diferencia en la unidad de tiempo entre los individuos que han caído enfermos por primera vez y los que están en recuperación:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{si} \quad I(t) > I^*, \\ -\beta I & \text{si} \quad I(t) \leqslant I^*. \end{cases} \tag{40}$$

Las constantes de proporcionalidad α y β se denominan *coeficiente de morbilidad* y *coeficiente de convalecencia*, respectivamente.

www.FreeLibros.me

Finalmente, la velocidad de variación del número de individuos convalecientes se da mediante la ecuación

$$\frac{dR}{dt} = \beta I.$$

Para que las soluciones de las ecuaciones correspondientes sean únicas, hace falta prefijar las condiciones iniciales. Por comodidad, supongamos que en el instante $t = 0$ en la población no hay individuos inmunes a la enfermedad, es decir, $R(0) = 0$, y que inicialmente el número de individuos infectados es igual a $I(0)$. Supongamos además que los coeficientes de morbilidad y de convalecencia son iguales, o sea, $\alpha = \beta$ (le proponemos al lector analizar el caso cuando estos coeficientes no son iguales). Debemos examinar dos casos.

Caso 1. El número $I(0) \leqslant I^*$. En este caso, con el aumento del tiempo la infección no se propaga, ya que $\frac{dS}{dt} = 0$ y, por consiguiente, conforme a la ecuación (38) y a la condición inicial $R(0) = 0$, para todo t es válida la igualdad

$$S(t) = S(0) = N - I(0).$$

Una situación similar se presenta cuando una cantidad suficientemente grande de individuos infectados se somete a cuarentena. Entonces de la ecuación (40) toma la forma

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I.$$

De aquí

$$I(t) = I(0)e^{-\alpha t}.$$

www.FreeLibros.me

Por tanto,

$$R(t) = N - S(t) - I(t) = I(0) \cdot \left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

En la figura 9 se muestra cómo cambia el número de individuos en cada uno de los tres grupos respecto al tiempo t.

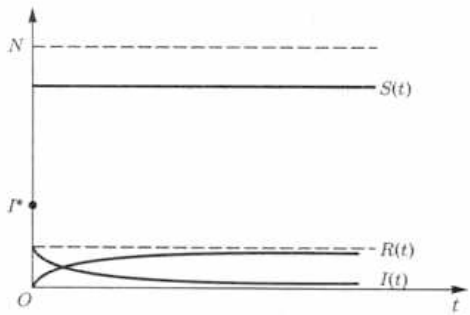

Fig. 9

Caso 2. El número $I(0) > I^*$. En estas condiciones, debe existir un intervalo de tiempo $0 \leqslant t < T$ donde es válida la desigualdad $I(t) > I^*$, ya que, de acuerdo con el sentido del problema, la función I debe ser una función continua de t. De aquí se infiere que para todo t del intervalo $[0, T)$ la enfermedad será adquirida por todos los individuos susceptibles de contagio. Entonces de la ecuación (39) se deduce que

$$S(t) = S(0)e^{-\alpha t}$$

para $0 \leqslant t < T$.

www.FreeLibros.me

Sustituyendo el valor de $S(t)$ de la última igualdad en la ecuación (40), llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S(0)e^{-\alpha t}. \tag{41}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (41) por $e^{\alpha t}$ resulta

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{\alpha t}\right) = \alpha S(0),$$

de donde

$$Ie^{\alpha t} = \alpha S(0)t + C$$

y, consiguientemente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (41) queda determinado por la fórmula

$$I(t) = Ce^{-\alpha t} + \alpha S(0)te^{-\alpha t}. \tag{42}$$

Haciendo $t = 0$ en (42) obtenemos $C = I(0)$, y la ecuación (42) toma la forma

$$I(t) = \left(I(0) + \alpha S(0)t\right)e^{-\alpha t} \tag{43}$$

para $0 \leqslant t < T$.

Dediquémonos ahora a la búsqueda de un valor concreto de T y del instante $t_{\max}$ cuando el número de individuos infectados alcanza su valor máximo.

La respuesta a la primera pregunta es importante, porque en el instante T cesa el contagio de los individuos propensos a enfermarse.

www.FreeLibros.me

De lo anterior se deduce que para $t = T$, el segundo miembro de la ecuación (43) toma el valor I^*, es decir,

$$I^* = \big(I(0) + \alpha S(0)T\big)e^{-\alpha T}. \tag{44}$$

Pero

$$S(T) = \lim_{t\to\infty} S(t) = S(\infty)$$

es el número de individuos susceptibles de contagio que no adquieren la enfermedad, y para los cuales se cumple

$$S(T) = S(\infty) = S(0)e^{-\alpha T}.$$

De aquí resulta

$$T = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{S(0)}{S(\infty)}. \tag{45}$$

En esta igualdad se ve que si indicamos un valor explícito de $S(\infty)$, entonces con la ecuación (45) podremos predecir el instante en que se detiene la epidemia. Sustituyendo T de la expresión (45) en la ecuación (44), obtenemos la igualdad

$$I^* = \left(I(0) + S(0)\ln\frac{S(0)}{S(\infty)}\right)\frac{S(\infty)}{S(0)},$$

o bien

$$\frac{I^*}{S(\infty)} = \frac{I(0)}{S(0)} + \ln\frac{S(0)}{S(\infty)},$$

www.FreeLibros.me

que puede escribirse en la forma

$$\frac{I^*}{S(\infty)} + \ln S(\infty) = \frac{I(0)}{S(0)} + \ln S(0). \tag{46}$$

Por cuanto I^* y todos los términos en el segundo miembro de la ecuación (46) son conocidos, a partir de ella podemos determinar sin dificultad $S(\infty)$.

Para responder a la segunda pregunta, partiendo de la ecuación (43) llegamos a la igualdad

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha S(0) - \alpha I(0) - \alpha^2 S(0)t\right)e^{-\alpha t} = 0.$$

De aquí hallamos el tiempo $t_{\max}$ al cabo del cual I alcanza su valor máximo:

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{I(0)}{S(0)}\right).$$

Si sustituimos el valor $t_{\max}$ de esta igualdad en la ecuación (43), obtenemos

$$I_{\max} = S(0)\exp\left\{-\left(1 - \frac{I(0)}{S(0)}\right)\right\} = S(t_{\max}).$$

Esta expresión muestra, en particular, que en el instante $t_{\max}$ el número de individuos susceptibles de enfermarse coincide con el número de individuos infectados.

Para $t > T$, los individuos susceptibles de contagio no adquieren la infección, por lo que

$$I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)}.$$

www.FreeLibros.me

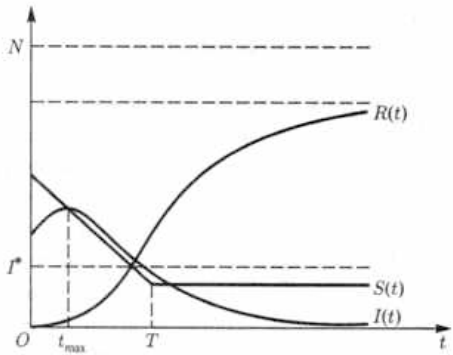

Fig. 10

En la figura 10 se ilustran las variaciones de los tres grupos respecto al tiempo.

10. Curva del perro (curva de persecución)

El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar las ecuaciones diferenciales para elegir una estrategia correcta en un problema de búsqueda.

Supongamos que un torpedero persigue un submarino en la bruma. En cierto instante la bruma se disipa y el submarino queda al descubierto sobre la superficie del agua, a una distancia de 3 millas del torpedero. Conociendo que la velocidad del torpedero es dos veces superior a la del submarino y que este último se sumergió inmediatamente después de ser descubierto y partió a toda velocidad siguiendo un curso rectilíneo en dirección desconocida, determinar

www.FreeLibros.me

la trayectoria (curva de persecución) que debe seguir el torpedero para pasar exactamente por arriba del submarino.

Introduzcamos un sistema de coordenadas polares r, θ de tal manera que el polo O coincida con el punto donde se encontraba el submarino en el instante en que fue descubierto, y que el eje polar r pase por el punto donde se hallaba el torpedero en ese mismo instante (fig. 11). Los razonamientos posteriores se basan en las consideraciones siguientes. Lo primero que debe hacer el torpedero es situarse a la misma distancia del polo O que el submarino; después el torpedero se debe mover alrededor del polo O siguiendo una trayectoria tal que ambos estén todo el tiempo a la misma distancia del punto O. Sólo así, moviéndose alrededor del polo O, el torpedero pasará por encima del submarino. Por tanto, al principio el torpedero se debe desplazar en línea recta hasta quedar situado a la misma distancia x del polo O que el submarino. La distancia x puede hallarse con alguna de las ecuaciones

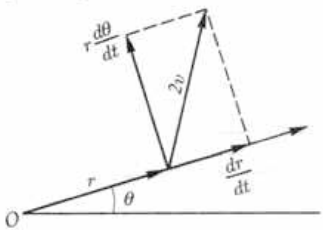

Fig. 11

$$\frac{x}{v} = \frac{3-x}{2v}, \quad \frac{x}{v} = \frac{3+x}{2v},$$

donde v es la velocidad del submarino, y $2v$ es la velocidad del torpedero. Resolviendo las últimas ecuaciones hallamos que la distancia x puede ser igual a una o tres millas.

Si durante este desplazamiento rectilíneo el torpedero y el submarino no se "encontraron", en lo sucesivo el torpedero debe moverse

www.FreeLibros.me

alrededor del polo O (en el sentido del movimiento de las agujas del reloj o en sentido contrario), alejándose de éste a la velocidad v (velocidad radial) del submarino. Descompongamos la velocidad $2v$ del torpedero en sus componentes radial v_r y tangencial v_T (fig. 11).

La componente radial es la velocidad a la que el torpedero se aleja del polo O, es decir,

$$v_r = \frac{dr}{dt}.$$

La componente tangencial es la velocidad lineal de rotación del torpedero alrededor del polo. Como se sabe, esta velocidad es igual al producto de la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$ por el radio r:

$$v_T = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Como $v_r = v$, entonces

$$v_T = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v.$$

Así, el problema inicial se reduce a resolver el sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v.$$

Eliminando la variable t, este sistema se reduce a la ecuación

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}},$$

www.FreeLibros.me

que tiene por solución

$$r = Ce^{\theta/\sqrt{3}},$$

donde C es una constante arbitraria.

Puesto que el torpedero comienza a moverse alrededor del polo O desde el eje polar r a una distancia de x millas del punto O ($r = 1$ para $\theta = 0$ y $r = 3$ para $\theta = -\pi$), concluimos que en el primer caso $C = 1$ y en el segundo $C = 3e^{\pi/\sqrt{3}}$. Dicho con otras palabras, para cumplir su tarea el torpedero se debe mover dos o seis millas en línea recta hacia el lugar donde fue descubierto el submarino y después navegar por alguna de las espirales

$$r = e^{\theta/\sqrt{3}} \quad \text{ó} \quad r = 3e^{(\theta+\pi)/\sqrt{3}}.$$

11. Modelos de operaciones militares

En los tiempos de la Primera Guerra Mundial, el ingeniero y matemático inglés F. W. Lanchester construyó varios modelos matemáticos de operaciones militares aéreas. Más tarde estos modelos se generalizaron y extendieron a los casos de operaciones militares de tropas regulares, agrupaciones guerrilleras y operaciones combinadas de ambos tipos. Examinemos los tres modelos.

Supongamos que en un conflicto armado participan dos partes contrincantes x e y. Denotemos con $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, las fuerzas numéricas de las partes en el instante t (el tiempo t se mide en días, comenzando por el primer día de operaciones). Las variables

www.FreeLibros.me

$x(t)$ e $y(t)$ desempeñarán un papel decisivo en la construcción de los modelos mencionados, pues en la práctica es muy difícil definir criterios de comparación de las partes que, además, consideren el grado de preparación militar y de pertrechamiento, el nivel y la experiencia del personal de mando, el estado moral, y muchos otros factores.

Supongamos también que $x(t)$ e $y(t)$ varían continuamente y, más aún, que son derivables respecto al tiempo. Es menester aclarar que tales suposiciones son una simplificación de la situación real, ya que de hecho $x(t)$ e $y(t)$ son números enteros. Al mismo tiempo, si la fuerza numérica de cada parte es suficientemente grande, el incremento de la cantidad en una o dos personas es, desde el punto de vista práctico, una magnitud infinitésima en comparación con la fuerza numérica existente. Por eso se puede considerar que durante intervalos pequeños de tiempo la fuerza numérica también varía en cantidades pequeñas (no enteras). Por supuesto, estos acuerdos no son suficientes para deducir fórmulas que expresen $x(t)$ e $y(t)$ como funciones de t, aunque sí es posible indicar una serie de factores que permitan definir la velocidad de variación del tamaño numérico de las partes contrincantes. Concretamente, denotemos mediante OLR la velocidad con la que la parte x sufre pérdidas a causa de enfermedades y otros factores no vinculados directamente con las operaciones militares; mediante CLR la velocidad con la que la parte x sufre pérdidas debido a los encuentros directos en el curso de las operaciones militares con la parte y; y con RR la velocidad con la que llegan los refuerzos de la parte x. Entonces la velocidad de variación de $x(t)$ es

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(OLR + CLR) + RR. \tag{47}$$

Para $y(t)$ la ecuación es análoga. El problema ahora consiste en indicar las fórmulas correspondientes para las magnitudes OLR, CLR

www.FreeLibros.me

y RR, y luego investigar las ecuaciones diferenciales construidas. Las deducciones que se infieren del análisis permitirán responder a la pregunta acerca del posible vencedor.

En adelante, usaremos las notaciones siguientes: a, b, c, d, g y h son constantes no negativas que caracterizan el grado de influencia de diferentes factores en las bajas de ambas partes x e y; $P(t)$ y $Q(t)$ son términos que expresan la posibilidad de refuerzos para las tropas x e y en el transcurso del día; x_0 e y_0 son las fuerzas numéricas de x e y antes de comenzar las operaciones militares. Escribamos los tres modelos[3)] construidos por Lanchester. El primer modelo se refiere a la descripción de operaciones militares entre tropas regulares, y su forma es

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t).$$

Este sistema se denominará *sistema diferencial tipo* (A).

El segundo modelo

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t)$$

[3)] En el artículo de Coleman C. S. "Combat models" (Differential equations models, New York, 1983, P. 109–131) se citan ejemplos concretos de operaciones militares y se muestra su grado de concordancia con los modelos diferenciales examinados.

www.FreeLibros.me

describe operaciones militares entre grupos guerrilleros. Llevémoslo *sistema diferencial tipo* (B). Finalmente, el tercer modelo

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t),$$

llamado *sistema diferencial tipo* (C), describe operaciones militares mixtas, en las cuales toman parte tanto tropas regulares como grupos guerrilleros.

Cada ecuación diferencial de los modelos que acabamos de plantear representa la velocidad de variación de las fuerzas numéricas de las partes enemigas como una función de diferentes factores que influyen en el desarrollo del conflicto. Nótese que estas ecuaciones tienen la estructura (47). Las bajas de efectivos no ligadas directamente con las operaciones militares (dichas bajas están definidas por los términos $-ax(t)$ y $-dy(t)$) permiten obtener las velocidades relativas constantes de pérdidas (en ausencia de operaciones militares y de refuerzos) a partir de las ecuaciones

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -d.$$

Si en los modelos de Lanchester figuran solamente los términos correspondientes a los refuerzos y a las pérdidas no relacionadas con las operaciones militares, significa que, en general, no hay combates. Por el contrario, la presencia de los términos $-by(t)$, $-cx(t)$, $-gx(t)\,y(t)$ y $-hx(t)\,y(t)$ significa que tienen lugar operaciones militares.

www.FreeLibros.me

Consideremos el sistema diferencial tipo (A). Supongamos que cada una de las partes enfrentadas se encuentra en la zona de alcance de la otra parte y que el fuego se dirige sólo contra la fuerza viva que participa directamente en las operaciones militares. Bajo estas suposiciones Lanchester propone introducir un término $-by(t)$ que refleje las pérdidas de unidades de tropas regulares de la parte x durante los combates. El coeficiente b indica la eficiencia de las acciones militares de la parte y. Entonces la ecuación

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = -b$$

muestra que la constante b mide la eficiencia media de cada unidad de las fuerzas de combate de la parte y. Así mismo se explica el término $-cx(t)$. En general, no es nada fácil calcular los coeficientes de eficiencia b y c. Un caso particular relativamente simple se presenta cuando

$$b = r_y p_y, \quad c = r_x p_x, \tag{48}$$

donde r_y, r_x son los *coeficientes de potencia de artillería* de las partes y y x, respectivamente, y p_y, p_x son las probabilidades de que cada disparo de las partes y y x resulte certero.

Nótese que en el sistema diferencial tipo (A) los términos correspondientes a las pérdidas en combate son lineales. En cuanto a los sistemas tipo (B), los términos análogos ya no son lineales. Efectivamente, supongamos que una fuerza numérica guerrillera $x(t)$ ocupa cierto territorio R permaneciendo invisible al enemigo. Aun manteniendo bajo fuego el territorio R, el enemigo no puede saber la eficiencia de sus propias operaciones. En este caso es muy probable que las bajas de la guerrilla x sean proporcionales, por un lado,

www.FreeLibros.me

a su fuerza numérica $x(t)$ y, por otro lado, a la fuerza numérica $y(t)$ del enemigo. De esta manera, el término correspondiente a las bajas de la guerrilla x tiene la forma $-gx(t)y(t)$, donde el coeficiente de eficiencia de las operaciones militares de la parte y, hablando en general, es más difícil de estimar que el coeficiente b de la primera igualdad de (48). Sin embargo, para hallarlo podemos emplear el coeficiente de potencia de artillería r_y, así como los razonamientos de Lanchester de que la probabilidad de un disparo certero de la parte y es directamente proporcional a la denominada *eficacia territorial* A_{ry} de un disparo de la parte y e inversamente proporcional al área A_x del territorio R ocupado por las fuerzas x. Aquí A_{ry} representa el área que ocupa un guerrillero. De esta manera, las fórmulas probabilísticas para determinar g y h son las siguientes:

$$g = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}, \quad h = r_x \frac{A_{rx}}{A_y}. \tag{49}$$

Examinemos con mayor detalle cada uno de los tres modelos diferenciales introducidos anteriormente.

Sistemas diferenciales tipo (A). Modelo cuadrático

Supongamos que las tropas regulares de dos fuerzas enemigas sostienen combates en una situación simplificada, en la que no hay pérdidas no relacionadas directamente con los combates. Si ninguna de las dos partes recibe refuerzos, el modelo matemático se reduce al sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx. \tag{50}$$

www.FreeLibros.me

Al dividir la segunda ecuación por la primera, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}. \tag{51}$$

Integrando la ecuación diferencial (51), obtenemos

$$b\left(y^2(t) - y_0^2\right) = c\left(x^2(t) - x_0^2\right). \tag{52}$$

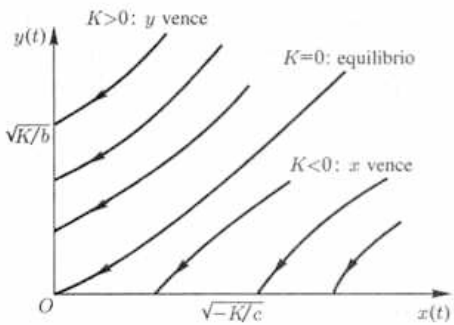

Fig. 12

La igualdad (52) explica por qué el sistema (50) corresponde a un modelo cuadrático. Si se denota con K la constante $by_0^2 - cx_0^2$, entonces la ecuación

$$by^2 - cx^2 = K, \tag{53}$$

obtenida de la igualdad (52), representa una hipérbola (un par de rectas si $K = 0$), lo que nos da la posibilidad de clasificar el sistema (50) de una manera más exacta. Concretamente, lo podemos denominar *sistema diferencial con ley hiperbólica*.

En la figura 12 se ilustran las hipérbolas para diferentes valores de K. Por consideraciones obvias se examina únicamente el primer cuadrante ($x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$). Las flechas en las curvas indican la dirección de variación de las fuerzas numéricas con el transcurso del tiempo.

www.FreeLibros.me

Para responder a la pregunta sobre quién vence en el modelo (50), convengamos, primeramente, que la parte y (la parte x) vence si ella es la primera en destruir las fuerzas de combate de la parte x (de la parte y). En nuestro caso vence la parte y si $K > 0$, puesto que conforme a la ecuación (53) la variable y nunca se anula, mientras que la variable x se hace igual a cero para el valor $y(t) = \sqrt{\frac{K}{b}}$. Por esto, para vencer, las fuerzas y deben tratar de lograr una situación en la que $K > 0$, es decir,

$$by_0^2 > cx_0^2. \tag{54}$$

Sustituyendo en (54) las expresiones (48) de b y c, obtenemos

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x}{r_y}\frac{p_x}{p_y}. \tag{55}$$

El primer miembro de la desigualdad (55) muestra que las variaciones en la relación de fuerzas $\frac{y_0}{x_0}$ le dan una ventaja "cuadrática" a una de las partes. Así, por ejemplo, una variación de la relación de fuerzas desde $\frac{y_0}{x_0} = 1$ hasta $\frac{y_0}{x_0} = 2$ le da una ventaja cuádruple a las fuerzas y. Nótese que la ecuación (53) determina la correlación de fuerzas de las partes en conflicto, pero no toma en consideración explícitamente el tiempo. Para deducir las fórmulas que contienen explícitamente al tiempo, procederemos de la manera siguiente. Derivemos respecto a t la primera ecuación del sistema (50) y utilicemos la segunda ecuación de Esc mismo sistema. Así llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx = 0. \tag{56}$$

www.FreeLibros.me

Si como condiciones iniciales tomamos

$$x(0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -by_0,$$

la solución particular correspondiente de la ecuación (56) es

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} \beta t - \gamma y_0 \operatorname{sh} \beta t, \tag{57}$$

donde $\beta = \sqrt{bc}$, $\gamma = \sqrt{\dfrac{b}{c}}$. Análogamente resulta

$$y(t) = y_0 \operatorname{ch} \beta t - \frac{x_0}{\gamma} \operatorname{sh} \beta t. \tag{58}$$

En la figura 13 se representan los gráficos de las soluciones (57) y (58) para $K > 0$ (es decir, cuando $by_0^2 > cx_0^2$ ó cuando $\gamma y_0 > x_0$).

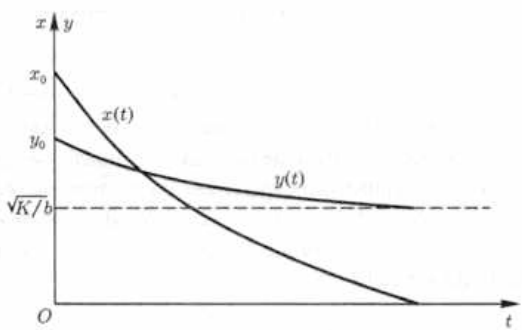

Fig. 13

www.FreeLibros.me

En conclusión, para que la parte y venza no es imprescindible que el número y_0 sea superior al número x_0. Se requiere sólo el cumplimiento de la desigualdad $\gamma y_0 > x_0$.

Sistemas diferenciales tipo (B). Modelo lineal

Las ecuaciones dinámicas que simulan las operaciones militares de dos partes en conflicto, pueden resolverse fácilmente si, como en el caso anterior, se ignoran las pérdidas no relacionadas directamente con las operaciones militares y ninguna de las partes recibe refuerzos. Bajo tales restricciones el sistema diferencial tipo (B) adquiere la apariencia

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \quad \frac{dy}{dt} = -hxy. \tag{59}$$

Dividiendo la segunda ecuación del sistema (59) por la primera, obtenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g},$$

cuya integración nos da

$$g\left(y(t) - y_0\right) = h\left(x(t) - x_0\right). \tag{60}$$

La dependencia lineal expresada en (60) aclara por qué el sistema no lineal (59) corresponde a un modelo lineal de combate. Escribamos la igualdad (60) en la forma

$$gy - hx = L, \tag{61}$$

www.FreeLibros.me

donde $L = gy_0 - hx_0$. De aquí, en particular, se deduce que si $L > 0$, el resultado de las operaciones militares es el triunfo de la parte y. En cambio, si $L < 0$ el vencedor será la parte x.

En la figura 14 se ilustra la dependencia funcional lineal (61) para diferentes valores de L.

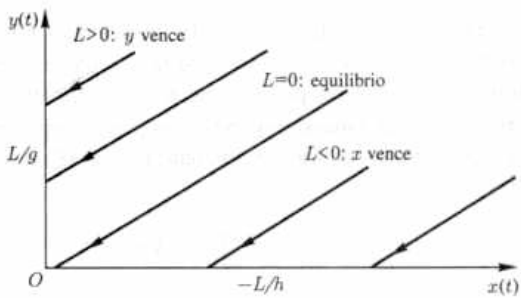

Fig. 14

Examinemos con más detalle la situación en que hay un vencedor. Supongamos que vence la parte y. Como ya sabemos, debe cumplirse la desigualdad $gy_0 - hx_0 > 0$, es decir,

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{h}{g}.$$

Valiéndonos de las fórmulas (49), podemos escribir la condición de victoria de la parte y de la manera siguiente:

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{r_x A_{rx} A_x}{r_y A_{ry} A_y}. \tag{62}$$

www.FreeLibros.me

De aquí se deduce que la estrategia de las fuerzas y consiste en hacer máxima la relación $\frac{y_0}{x_0}$ y mínima la relación $\frac{A_x}{A_y}$. Desde un punto de vista práctico es mejor escribir la desigualdad (62) en la forma

$$\frac{A_y y_0}{A_x x_0} > \frac{r_x A_{rx}}{r_y A_{ry}},$$

pues así se ve que los productos $A_y y_0$ y $A_x x_0$ son, en cierto sentido, magnitudes críticas.

Señalemos finalmente que utilizando la igualdad (61) no es difícil obtener a partir del sistema (59) las fórmulas que muestran cómo varían las fuerzas de ambas partes con el tiempo.

Sistemas diferenciales tipo (C). Modelo parabólico

En el modelo (C), fuerzas guerrilleras se oponen a unidades regulares. Igual que en los modelos anteriores, simplifiquemos la situación asumiendo que ninguna de las partes obtiene refuerzos y las bajas están directamente relacionadas con las operaciones militares. En este caso tenemos el sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \quad \frac{dy}{dt} = -cx, \tag{63}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son las fuerzas numéricas guerrilleras y del ejército regular, respectivamente. Dividiendo la segunda ecuación del sistema (63) por la primera, llegamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy}.$$

www.FreeLibros.me

Integrando en los límites correspondientes, obtenemos

$$gy^2(t) = 2cx(t) + M, \tag{64}$$

donde $M = gy_0^2(t) - 2cx_0$. Vemos pues que el sistema diferencial (63) corresponde a un modelo parabólico de desarrollo de las operaciones militares. Si $M < 0$, vence la guerrilla, pero si $M > 0$, entonces el vencedor es la fuerza regular.

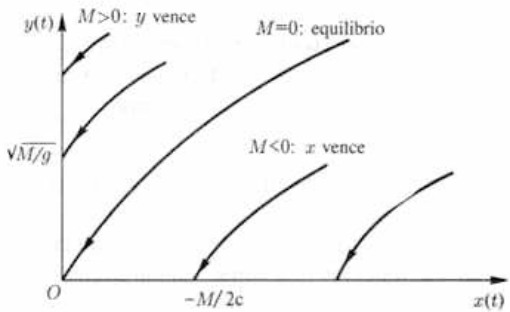

Fig. 15

En la figura 15 se representan esquemáticamente las parábolas determinadas por la ecuación (64) para distintos valores de M. La experiencia muestra que las tropas regulares pueden infligir una derrota a la guerrilla sólo en el caso, cuando la razón $\frac{y_0}{x_0}$ es considerablemente superior a la unidad. Basándonos en el modelo parabólico de desarrollo de las operaciones militares y tomando en consideración la condición $M > 0$, podemos inferir que la victoria de las unidades regulares queda garantizada con el cumplimiento de la desigualdad

www.FreeLibros.me

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2c}{g}\frac{1}{x_0}.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (48) y (49), esta desigualdad toma la forma

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > 2\,\frac{r_x}{r_y}\,\frac{A_x p_x}{A_{ry}}\,\frac{1}{x_0}.$$

12. ¿Por qué los relojes de péndulo no son exactos?

Para responder a la interrogante formulada, examinemos el modelo idealizado de un reloj de péndulo formado por una varilla de longitud l y una pesa de masa m en su extremo. La masa de la varilla se considera despreciable en comparación con la de la pesa (fig. 16). Si la pesa se desvía de modo que la varilla forme un ángulo α con la vertical y luego se suelta, entonces, según la ley de conservación de la energía,

$$\frac{mv^2}{2} = mg(l\cos\theta - l\cos\alpha), \qquad (65)$$

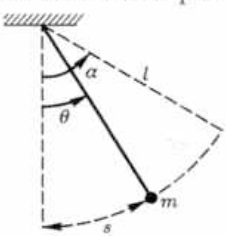

Fig. 16

donde v es la velocidad de la pesa, y g es la aceleración de la gravedad.

Si tenemos en cuenta únicamente las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio, podemos considerar que la longitud s

www.FreeLibros.me

del arco que describe la pesa cuando se desvía en un ángulo pequeño θ satisface la relación $s = l\theta$. Siendo así,

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt},$$

y de la fórmula (65) llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{l}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\alpha). \tag{66}$$

Puesto que θ decrece con el aumento de t (para valores pequeños de t), la ecuación (66) puede escribirse en la forma

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

Si T es el período de las oscilaciones del péndulo, entonces

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

o bien

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}. \tag{67}$$

Como se advierte en la última fórmula, el período de las oscilaciones del péndulo depende del ángulo α. Este hecho es la causa principal por la que el reloj de péndulo no es exacto, pues, en la práctica, cada vez que la pesa alcanza la posición extrema el ángulo es diferente de α.

www.FreeLibros.me

La fórmula (67) se puede reescribir en una forma más simple. En efecto, ya que

$$\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}, \quad \cos\alpha = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2},$$

entonces

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2} - \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}}}, \quad (68)$$

donde $k = \mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}$.

Cambiemos ahora la variable θ por la variable φ haciendo $\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = k\,\mathrm{sen}\,\varphi$. De la última igualdad se deduce que cuando θ crece desde 0 hasta α, la variable φ crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$; además, tiene lugar la igualdad

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\cos\varphi\,d\varphi,$$

o bien

$$d\theta = \frac{2k\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{k^2 - \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\,d\varphi.$$

En virtud de la última expresión podemos transformar la fórmula (68) en

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

www.FreeLibros.me

La función

$$F(k,\ \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

se llama *integral elíptica de primera especie*. Las *integrales elípticas de segunda especie* tienen la forma

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi.$$

En vista de que las integrales elípticas no se pueden calcular por medio de funciones elementales, utilizaremos otro enfoque, el cual será considerado cuando estudiemos los sistemas conservativos en la mecánica. Aquí sólo señalaremos que el punto de partida en el análisis posterior será la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \operatorname{sen} \theta = 0, \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

la cual se obtiene de la ecuación (66) derivando respecto a t.

13. Reloj cicloidal

En el problema anterior hemos establecido que el reloj de péndulo simple (circular) no puede funcionar con precisión. Por eso surge una pregunta natural: ¿existe algún otro péndulo cuyo tiempo de oscilación no dependa de la amplitud? Por primera vez este problema fue planteado y resuelto en el siglo XVII. Más adelante presentaremos

www.FreeLibros.me

la solución, pero por ahora nos ocuparemos de la deducción de la ecuación de una curva extraordinaria, a la que Galileo denominó *cicloide* (de la palabra griega *cicloides*, que significa circular, redondo).

La cicloide es una curva plana que representa la trayectoria descrita por un punto de la circunferencia de un círculo (llamado *círculo generador*) que rueda sin deslizamiento sobre una recta.

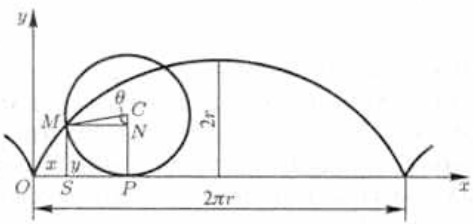

Fig. 17

Supongamos que la recta sobre la cual rueda el círculo es el eje de abscisas (fig. 17) y que el radio del círculo generador es igual a r. Asumamos que el punto que describe la cicloide está situado inicialmente en el origen de coordenadas, y que ocupa la posición M cuando el círculo gira en un ángulo θ. Entonces, partiendo de la construcción geométrica, obtenemos

$$x = OS = OP - SP,$$
$$y = MS = CP - CN;$$

pero

$$OP = \widehat{MP} = r\theta, \qquad SP = MN = r \operatorname{sen} \theta,$$
$$CP = r, \qquad CN = r \cos \theta,$$

por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta). \tag{69}$$

www.FreeLibros.me

Si excluimos el parámetro θ de las ecuaciones (69), entonces la ecuación de la cicloide toma la forma siguiente en el sistema de coordenadas rectangulares Oxy:

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Del procedimiento de construcción de la cicloide se deduce que ésta debe estar formada por arcos congruentes, cada uno de los cuales corresponde a una revolución completa del círculo generador[4]. Cada arco se une con su vecino en el punto donde poseen una tangente vertical común. Estos puntos, conocidos como *puntos de retroceso* de la cicloide, corresponden a las posiciones más bajas del punto que describe la cicloide. Las posiciones más altas de este punto se encuentran en el medio entre los puntos de retroceso y se denominan *vértices* de la cicloide; el segmento de recta que une cada par de puntos de retroceso vecinos, y cuya longitud es igual a $2\pi r$, se conoce con el nombre de *base del arco* de la cicloide.

La cicloide tiene las propiedades siguientes:

a) *el área limitada por un arco de la cicloide y la base de Esc arco es igual al triple del área del círculo generador* (teorema de Galileo);
b) *la longitud de un arco de la cicloide es igual al cuádruple del diámetro del círculo generador* (teorema de Wren).

El último resultado es inesperado: incluso para calcular la longitud de una curva tan simple como la circunferencia, fue necesario introducir

---

[4] En el libro de G. N. Berman "Cicloides", Moscú, 1980 (en ruso), por citar un ejemplo, se pueden hallar materiales muy interesantes sobre la cicloide y otras curvas afines a ella.

www.FreeLibros.me

el número irracional π, que no es tan fácil de calcular, mientras que la longitud de un arco de cicloide se expresa ¡mediante un número entero de radios (diámetros)! La cicloide posee también muchas otras propiedades interesantes que tienen una importancia especial en la física y en las aplicaciones técnicas. En particular, los perfiles de los dientes de algunos piñones, la configuración de muchos tipos de excéntricas, levas y otras piezas de máquinas tienen precisamente forma de cicloide.

Remitámonos al problema cuya solución permitió al científico holandés C. Huygens construir en 1673 un reloj exacto. El problema consiste en construir en un plano vertical una curva tal que un punto material pesado que se encuentra en reposo en el instante inicial $t = t_0$ baje por ella hasta cierto horizonte fijo en un tiempo que no depende de la posición inicial del punto en dicha curva. Como demostró Huygens, esta curva isócrona (del griego *iso* — igual y *chorros* — tiempo) o tautocrona es la cicloide.

La solución de este problema se puede obtener procediendo de la manera siguiente. Supongamos que en el borde superior de una tabla colocada verticalmente se labra una concavidad alargada en forma de cicloide (fig. 18). Sin tomar en consideración el rozamiento de la madera, tratemos de determinar el tiempo durante el cual una bola metálica rodará desde el punto M hasta el punto más bajo K.

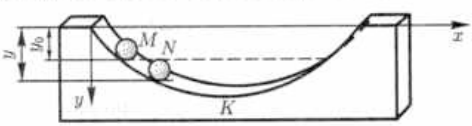

Fig. 18

Sean x_0, y_0 las coordenadas de la posición inicial de la bola (del punto M) y θ_0, el valor correspondiente del parámetro. Cuando

www.FreeLibros.me

la bola rueda desde la posición M hasta cierta posición $N(\theta)$, la distancia vertical recorrida es h. En virtud de la segunda ecuación (69) tenemos:

$$h = y - y_0 = r(1 - \cos\theta) - r(1 - \cos\theta_0) = r(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Se sabe que la velocidad de caída de un cuerpo es

$$v = \sqrt{2gh},$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Sustituyendo en esta fórmula la expresión de h antes obtenida, hallamos

$$v = \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

Por otra parte, como la velocidad es la derivada del camino recorrido s respecto al tiempo T, hallamos

$$\frac{ds}{dT} = \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

Para la cicloide, $ds = 2r \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta$. Por tanto, la última ecuación diferencial toma la forma

$$dT = \frac{2r \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}.$$

Integrando esta ecuación dentro de los límites correspondientes, obtenemos

www.FreeLibros.me

$$T=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{2r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0-\cos\theta)}}=-2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{d\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_0}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

En resumen, el tiempo T que demora la bola en rodar de la posición M a la posición K es

$$T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

En esta fórmula se puede ver que el período T no depende de θ_0, es decir, no depende de la posición inicial M de la bola y, por tanto, podemos asegurar que dos bolas que han comenzado simultáneamente a rodar por la concavidad desde dos puntos diferentes M y N, llegarán al punto K al mismo tiempo.

Puesto que convenimos despreciar el rozamiento, después de llegar al punto K la bola continuará su movimiento por inercia, y al cabo del intervalo de tiempo indicado en la última fórmula alcanzará un punto M_1 situado a la misma altura que el punto M. Luego la bola realiza todo el recorrido de regreso, completando así el movimiento del denominado *péndulo cicloidal* con período de oscilación

$$T_0=4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{70}$$

Una propiedad distintiva del péndulo cicloidal en comparación con el péndulo simple (circular) consiste en que el período de sus oscilaciones no depende de la amplitud.

www.FreeLibros.me

Veamos cómo se puede obligar a un péndulo circular simple a moverse de manera isócrona sin recurrir a la construcción anterior, ni a otros dispositivos semejantes con mucho rozamiento. Para lograr nuestro cometido es suficiente fabricar una plantilla (por ejemplo, de madera) formada por dos seminarios de cicloide iguales con un punto de retroceso común (fig. 19). La plantilla se fija verticalmente y en el punto de retroceso O se suspende una bola de un hilo cuya longitud es igual al doble del diámetro del círculo generador de la cicloide.

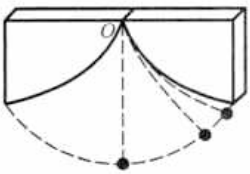

Fig. 19

Si ahora desviamos la bola de la vertical hasta un punto arbitrario M y la soltamos, entonces la bola comenzará a oscilar con un período que no depende de la elección del punto M. Incluso si la amplitud de las oscilaciones disminuye bajo la acción del rozamiento y de la resistencia del aire, ¡el tiempo de oscilación del péndulo permanecerá invariable! El movimiento de un péndulo circular que se mueve por un arco de circunferencia es aproximadamente isócrono para amplitudes pequeñas, cuando el arco de circunferencia es casi igual al arco de la cicloide.

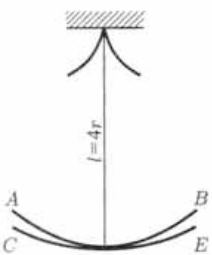

Fig. 20

A modo de ejemplo, examinemos las oscilaciones pequeñas de un péndulo por un arco de cicloide AB (fig. 20). Si las oscilaciones son muy pequeñas, la influencia de la plantilla prácticamente no se siente y el péndulo oscila casi como un péndulo circular simple con un hilo de longitud $4r$. La trayectoria AB del péndulo cicloidal es muy similar a la trayectoria CE de un péndulo circular con un hilo de longitud $l = 4r$. Por eso el

www.FreeLibros.me

período de las oscilaciones pequeñas del péndulo circular con hilo de longitud $l = 4r$ es casi igual al período de las oscilaciones del péndulo cicloidal.

Si ahora en la fórmula (70) hacemos $r = \frac{l}{4}$, el período de las oscilaciones pequeñas del péndulo circular se puede expresar en función de la longitud l de su hilo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Para concluir, destaquemos que la cicloide es la única curva que se caracteriza por el hecho de que un punto material pesado que se mueva a lo largo de ella realizará oscilaciones isócronas.

14. Problema de la braquistocrona

El problema de la braquistocrona (del griego *brachistos* — más corto, y *chronos* — tiempo), o de la curva del descenso más rápido, fue planteado por primera vez por el matemático suizo I. Bernoulli en 1696 y consistía en lo siguiente.

En un plano vertical se toman dos puntos A y B (fig. 21) no pertenecientes a una misma vertical. Se pide determinar entre todas las curvas que pasan por A y B aquélla con la propiedad de que un punto material

Fig. 21

www.FreeLibros.me

sometido a la acción de la fuerza de gravedad emplee el menor tiempo posible en rodar desde el punto A hasta el punto B.

Los mejores matemáticos de distintas épocas intentaron resolver este problema, y fue resuelto tanto por el propio I. Bernoulli como por G. W. Leibniz, I. Newton, G. L'Hospital y J. Bernoulli. Su fama se debe principalmente a que, además de la importancia de su solución desde el punto de vista de las ciencias naturales, sirvió de inspiración para la creación de un campo completamente nuevo de las matemáticas, el *cálculo de variaciones* o *cálculo variacional*.

La solución del problema de la braquistocrona se puede asociar con la solución de otro problema que surge en la óptica. En la figura 22 se representa esquemáticamente un rayo de luz que parte del punto A e incide en el punto P con una velocidad v_1, y luego atraviesa un medio más denso desde el punto P hasta el punto B con una velocidad menor v_2. El tiempo total T que necesita el rayo de luz para llegar desde el punto A hasta el punto B se halla de la igualdad

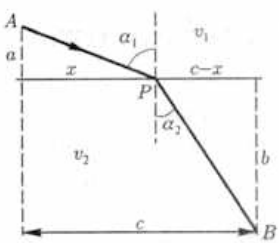

Fig. 22

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

Si suponemos que el rayo de luz recorre el camino indicado en el menor tiempo posible T, entonces

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

www.FreeLibros.me

o bien

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}.$$

La última igualdad expresa la conocida ley de refracción de Snell, cuya forma inicial obtenida experimentalmente es

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = a,$$

donde $a = \text{const}$.

La suposición acerca de que el rayo de luz pasa del punto A al punto B en un tiempo mínimo se conoce como *principio de Fermat del tiempo mínimo*. La importancia de este principio radica no sólo en que proporciona un fundamento racional para deducir la ley de Snell, sino también en que, en particular, se puede emplear para hallar la trayectoria (en general, no rectilínea) de un rayo de luz que atraviesa un medio de densidad variable.

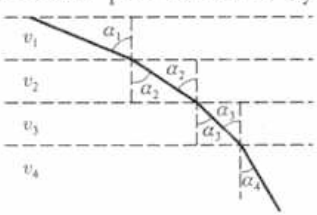

Fig. 23

Veamos, por ejemplo, el medio estratificado representado en la figura 23. En cada estrato por separado, la velocidad de la luz es constante, y decrece al pasar de una capa superior a la subyacente. Al pasar de una capa a otra, el rayo incidente se refracta, tendiendo cada vez más a la dirección vertical. Aplicando la ley de Snell a las fronteras entre las capas, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{v_3} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_4}{v_4}.$$

www.FreeLibros.me

Ahora supongamos que los espesores de las capas disminuyen ilimitadamente y que el número de capas crece ilimitadamente. Entonces en límite la velocidad de la luz decrece continuamente, por lo que podemos escribir (fig. 24)

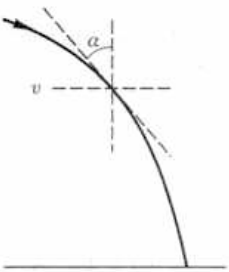

Fig. 24

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = a, \qquad (71)$$

donde $a = \text{const}$. Una situación semejante se observa (con las salvedades debidas) en el caso de un rayo de luz solar que incide sobre la Tierra: la velocidad del rayo disminuye a medida que aumenta la densidad de la atmósfera.

Regresando al problema de la braquistocrona, introduzcamos un sistema de coordenadas en un plano vertical (fig. 25) e imaginemos que una bola es capaz de elegir (como un rayo de luz) una trayectoria de descenso desde el punto A hasta el punto B de tal manera que el tiempo de descenso sea mínimo. Entonces, como se infiere de los razonamientos anteriores, es válida la fórmula (71).

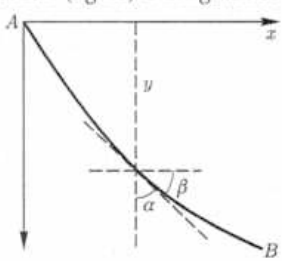

Fig. 25

Partiendo de la ley de conservación de la energía, concluimos que la velocidad alcanzada por la bola en un nivel prefijado, depende sólo de la pérdida de energía potencial al alcanzar este nivel y no depende de la forma de la trayectoria de movimiento. Esto significa que $v = \sqrt{2gy}$.

www.FreeLibros.me

Por otro lado, las construcciones geométricas muestran que

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Sustituyendo en (71) las expresiones halladas de sen α y v, obtenemos

$$y\left[1+(y')^2\right] = C. \tag{72}$$

La ecuación (72) es la ecuación diferencial de la braquistocrona. Mostremos ahora que la única curva braquistocrona es la cicloide. Efectivamente, separando variables en la ecuación (72) (recordemos que $y' = \dfrac{dy}{dx}$), llegamos a la ecuación de variables separadas

$$dx = \left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2} dy.$$

Introduzcamos una nueva variable φ mediante el cambio de variable

$$\left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Entonces

$$y = C\operatorname{sen}^2\varphi, \quad dy = 2C\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dx = \operatorname{tg}\varphi\, dy = 2C\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi = C(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

La integración de la última ecuación conduce a la solución

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi) + C_1,$$

www.FreeLibros.me

donde, en virtud de las condiciones iniciales, $x = y = 0$ para $\varphi = 0$ y $C_1 = 0$.

Así,

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi),$$
$$y = C\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Haciendo $\frac{C}{2} = r$, $2\varphi = \theta$, llegamos a las ecuaciones paramétricas estándares (69) de la cicloide. ¡La cicloide es una curva asombrosa: no sólo es isócrona, sino, también, braquistocrona!

15. Media aritmética, media geométrica y ecuaciones diferenciales

Estudiemos un problema curioso, resuelto por primera vez por el científico alemán C. F. Gauss.

Sean m_0 y n_0 dos números positivos arbitrarios ($m_0 > n_0$). Escribamos la media aritmética m_1 y la media geométrica n_1 de m_0 y n_0:

$$m_1 = \frac{m_0 + n_0}{2}, \quad n_1 = \sqrt{m_0 n_0}.$$

Escribamos ahora las medias aritmética y geométrica de m_1 y n_1:

$$m_2 = \frac{m_1 + n_1}{2}, \quad n_2 = \sqrt{m_1 n_1}.$$

www.FreeLibros.me

Continuando este proceso obtenemos dos sucesiones numéricas $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ convergentes, como se demuestra fácilmente. Surge la pregunta siguiente: ¿a qué es igual la diferencia entre los límites de estas sucesiones?

Expongamos una solución elegante de este problema, perteneciente al matemático alemán C. W. Borchardt y que está relacionada con la construcción de una ecuación diferencial de segundo orden. Sea a la diferencia buscada. No es difícil concluir que a depende de m_0 e y_0. Simbólicamente dicha dependencia se expresa escribiendo $a = f(m_0, n_0)$, donde f es cierta función. Por la forma en que definimos el número a vemos que también $a = f(m_1, n_1)$. Ahora, si multiplicamos m_0 y n_0 por un mismo número k, entonces cada uno de los números $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$, incluido a, también tendrán como factor al número k. Esto significa que a es una función homogénea de primer grado respecto a m_0 y n_0; por consiguiente,

$$a = m_0 f\left(1, \frac{n_0}{m_0}\right) = m_1 f\left(1, \frac{n_1}{m_1}\right).$$

Haciendo $\dfrac{n_0}{m_0} = x$, $\dfrac{n_1}{m_1} = x_1$, ... y denotando $\dfrac{1}{f(1, n_0/m_0)}$ con y, $\dfrac{1}{f(1, n_1/m_1)}$ con $y_1, \ldots$, hallamos

$$y = y_1 \frac{m_0}{m_1} = \frac{2y_1}{1+x}. \tag{73}$$

Ya que x_1 está relacionado con x por medio de la ecuación

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x},$$

www.FreeLibros.me

entonces

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}} = \frac{(x_1 - x_1^3)(1+x)^2}{2(x-x^3)}. \qquad (*)$$

Derivando la ecuación (73) respecto a x llegamos a que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2}y_1 + \frac{2}{1+x}\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}.$$

Sustituyendo aquí la derivada $\frac{dx_1}{dx}$ por su valor de la igualdad $(*)$ y simplificando el denominador $x - x^3$, obtenemos

$$(x-x^3)\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-1)}{1+x}y_1 + (1+x)(x_1 - x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}.$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad respecto a x, hallamos

$$\frac{d}{dx}\left((x-x^3)\frac{dy}{dx}\right) = 2y_1\frac{d}{dx}\left(\frac{x(x-1)}{1+x}\right) + \frac{2x(x-1)}{1+x}\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} +$$
$$+ (x_1 - x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1} + (1+x)\frac{d}{dx_1}\left((x_1 - x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx}.$$

Después de algunas transformaciones algebraicas la última ecuación toma la forma

$$\frac{d}{dx}\left((x-x^3)\frac{dy}{dx}\right) - xy = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}}\left\{\frac{d}{dx_1}\left((x_1 - x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}\right) - x_1y_1\right\}.$$

Si en la ecuación recién obtenida sustituimos x por x_1, entonces x_1 pasa a ser x_2. Si luego sustituimos x_1 por x_2, entonces x_2 pasa

www.FreeLibros.me

a ser x_3, etcétera. Por esto, haciendo

$$\frac{d}{dx}\left(\left(x-x^3\right)\frac{dy}{dx}\right)-xy=a^*(y),$$

llegamos a la igualdad

$$a^*(y)=\frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}}\frac{1-x_1}{(1+x_1)\sqrt{x_1}}\frac{1-x_2}{(1+x_2)\sqrt{x_2}}\cdots\frac{1-x_n}{(1+x_n)\sqrt{x_n}}a^*\left(y_{n+1}\right).$$

Si ahora hacemos que n tienda a ∞, entonces $1-x_n$ tenderá a 0 y obtendremos que

$$a^*(y)=0.$$

Esta igualdad significa que y satisface la ecuación diferencial

$$\left(x-x^3\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-3x^2\right)\frac{dy}{dx}-xy=0. \tag{74}$$

Teniendo presente que

$$a=f\left(m_0,n_0\right)=y\frac{f^2\left(m_0,n_0\right)}{m_0},$$

podemos hallar el valor del número a. En efecto, como y debe ser una solución constante de la ecuación (74), su único valor posible es $y\equiv 0$. De esta manera, la diferencia de los límites de las sucesiones $\{m_k\}$ y $\{n_k\}$ es igual a 0.

Además de que nos permitió resolver el problema inicial, la ecuación diferencial (74) representa gran interés por su relación directa con la solución del problema del período de las oscilaciones pequeñas del péndulo circular.

www.FreeLibros.me

Como hemos visto, el período de las oscilaciones pequeñas del péndulo circular se halla por medio de la fórmula

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

donde

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Pues bien, resulta que si $0 \leqslant k < 1$, entonces

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2} k^{2n}\right],$$

donde

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2} x^{2n}$$

es la solución de la ecuación diferencial (74).

16. Vuelo parabólico

Un cuerpo es lanzado con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo α con el horizonte. Despreciando el rozamiento del aire, deducir la ecuación de movimiento del cuerpo.

www.FreeLibros.me

Elijamos los ejes de coordenadas como se ilustra en la figura 26. Si denotamos la masa del cuerpo con la letra m, entonces la única fuerza que actúa en todo instante sobre el cuerpo es su propio peso $P = mg$, independientemente de la posición M que el cuerpo ocupe durante el movimiento. Por eso, en virtud de la segunda ley de Newton, las ecuaciones diferenciales del movimiento del cuerpo en las proyecciones sobre los ejes coordenados x e y son

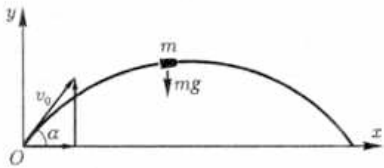

Fig. 26

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Simplificando m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{75}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos\alpha, & \frac{dy}{dt} &= v_0 \operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \quad \text{para} \quad t = 0. \tag{76}$$

Integrando las ecuaciones (75) y tomando en consideración las condiciones iniciales (76), llegamos a las ecuaciones del movimiento del cuerpo:

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)\, t, \\ y &= (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \tag{77}$$

www.FreeLibros.me

A partir de las ecuaciones (77) se pueden sacar varias conclusiones sobre el movimiento del cuerpo lanzado. Por ejemplo, es posible responder a las preguntas siguientes: ¿cuánto tiempo transcurre desde el instante en que fue lanzado el cuerpo hasta que llegó a tierra? ¿a qué distancia del punto de lanzamiento cae el cuerpo? ¿cuál es la altura máxima que alcanza? ¿cuál es la trayectoria del movimiento?

A la primera pregunta se puede responder hallando el valor de t para el cual $y = 0$. Haciendo $y = 0$ en la segunda ecuación (77), resulta

$$t\left(v_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0,$$

es decir, bien $t = 0$, bien $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$. El segundo valor da la respuesta a la primera pregunta.

Para responder a la segunda pregunta, calculemos el valor de x correspondiente al tiempo total $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$ del movimiento. Sustituyendo este valor en la primera ecuación de (77) obtenemos que la distancia por la horizontal está dada por la fórmula

$$\frac{(v_0 \cos \alpha)(2v_0 \operatorname{sen} \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

De la última igualdad se deduce, en particular, que el desplazamiento horizontal máximo $\dfrac{v_0^2}{g}$ se logra cuando $\alpha = 45°$.

La respuesta a la tercera pregunta se obtiene inmediatamente si indicamos la condición para que y alcance el máximo. Como se sabe,

www.FreeLibros.me

el valor máximo de y se alcanza en el punto t donde la derivada se anula, es decir, donde $\frac{dy}{dt} = 0$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha,$$

llegamos a la igualdad $-gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha = 0$, de donde

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

Sustituyendo ahora el valor obtenido de t en la segunda igualdad de (77), hallamos que la altura máxima es

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}.$$

La respuesta a la cuarta pregunta ya se obtuvo arriba. De hecho, la trayectoria del movimiento es una parábola, puesto que las ecuaciones (77) son las ecuaciones paramétricas de una parábola. En coordenadas cartesianas tenemos

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} \sec^2 \alpha.$$

17. Ingravidez o gravedad cero

El estado de ingravidez se puede lograr de diferentes maneras, aunque casi siempre se asocia (consciente o inconscientemente) con los cosmonautas flotando en las cabinas de las naves cósmicas o en el interior de las estaciones espaciales.

www.FreeLibros.me

Con el fin de aclarar el sentido físico del fenómeno de la ingravidez, analicemos el problema siguiente. Una persona de peso P se encuentra en la cabina de un ascensor que se mueve hacia abajo con aceleración $\omega = \alpha g$, donde g es la aceleración de la gravedad y $0 < \alpha < 1$. Determinar la presión que ejerce la persona sobre el fondo de la cabina, así como la aceleración del ascensor para la cual el valor de dicha presión es igual a cero.

En el interior del ascensor, sobre la persona actúan dos fuerzas (fig. 27): su propio peso P y la fuerza Q de reacción del fondo de la cabina, la cual es igual en magnitud a la presión que la persona ejerce sobre el fondo de la cabina. La ecuación diferencial del movimiento de la persona es

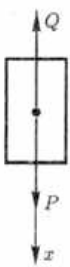

Fig. 27

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P - Q. \tag{78}$$

Por cuanto $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega = \alpha g$ y $m = \dfrac{P}{g}$, a partir de la ecuación (78) se deduce

$$Q = P - m\frac{d^2x}{dt^2} = P(1 - \alpha). \tag{79}$$

Tomando en consideración que $0 < \alpha < 1$, concluimos que $Q < P$. Así pues, la presión que ejerce la persona sobre el fondo de la cabina de un ascensor que se mueve hacia abajo es

$$Q = P(1 - \alpha).$$

En el en que el ascensor sube con aceleración $\omega = \alpha g$, donde $0 < \alpha < 1$, la presión de la persona sobre el fondo de la cabina es $Q = P(1 + \alpha)$.

www.FreeLibros.me

Calculemos ahora la aceleración del ascensor para la cual la persona no ejerce ninguna presión sobre el fondo de la cabina. Para ello es suficiente hacer $Q = 0$ en la igualdad (79). Como resultado obtenemos que $\alpha = 1$, es decir, la aceleración del ascensor debe ser igual a la aceleración de la gravedad para que $Q = 0$.

En otras palabras, si el ascensor cae libremente con aceleración igual a la aceleración g de la gravedad, el pasajero no hace presión alguna sobre el fondo de la cabina. Precisamente este estado se denomina *estado de ingravidez* o *estado de gravedad cero*. En estado de ingravidez no hay presiones mutuas entre las diferentes partes del cuerpo humano, y esto provoca en la persona sensaciones extrañas. En estado de ingravidez todos los puntos del cuerpo tienen la misma aceleración.

Por supuesto, el estado de ingravidez puede tener lugar no sólo durante la caída libre. Veamos el ejemplo siguiente.

¿Con qué velocidad debe girar una nave cósmica alrededor de la Tierra para que una persona en su interior se encuentre en estado de ingravidez?

Resolvamos el problema suponiendo que la nave cósmica se mueve por una órbita circular de radio $r + h$, donde r es el radio de la Tierra y h, la altura de vuelo de la nave sobre la superficie terrestre. Del problema anterior se deduce que en estado de ingravidez la presión del astronauta sobre el fondo de la cabina de la nave y, por consiguiente, la reacción Q del fondo de la cabina son iguales a cero. Así pues, $Q = 0$. Recurramos ahora

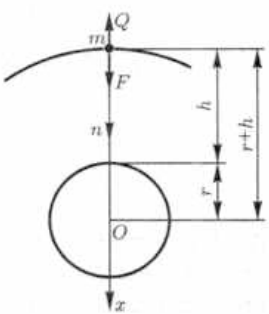

Fig. 28

www.FreeLibros.me

a la figura 28. El eje x está orientado a lo largo de la normal principal n a la trayectoria circular de la nave.

Recordemos que la ecuación diferencial del movimiento de un punto material a lo largo de la normal principal es

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn},$$

donde $\rho = r + h$, $\sum_{k=1}^{n} F_{kn} = F$, y la fuerza F está orientada a lo largo de la normal principal a la trayectoria del movimiento. Valiéndonos de la ecuación de movimiento indicada obtenemos

$$\frac{mv^2}{r+h} = F = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v^2}{r+h}.$$

Sustituyendo $\frac{d^2x}{dt^2}$ en (78), llegamos a la igualdad

$$\frac{mv^2}{r+h} = P - Q. \tag{80}$$

Aquí la fuerza P es igual a la fuerza F de atracción de la Tierra. A su vez, conforme a la ley de la gravitación universal, F es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $r + h$ desde la nave hasta el centro de la Tierra, es decir,

www.FreeLibros.me

$$F = \frac{km}{(r+h)^2}, \qquad (*)$$

donde m es la masa de la nave, y la constante k se determina partiendo de las consideraciones siguientes. la superficie de la Tierra (para $h = 0$) la fuerza de atracción es $F = mg$. Entonces de la fórmula $(*)$ sigue que $k = gr^2$ y, consiguientemente,

$$P = F = \frac{mgr^2}{(r+h)^2},$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

Sustituyendo ahora el valor obtenido de P en la fórmula (80) y teniendo en cuenta que $Q = 0$, concluimos que la velocidad requerida para que el cosmonauta permanezca en estado de ingravidez es

$$v = r\sqrt{\frac{g}{r+h}}.$$

18. Leyes de Kepler del movimiento planetario

Conforme a la ley de gravitación universal, *dos cuerpos de masas m y M separados a una distancia r se atraen mutuamente con una fuerza*

$$F = \frac{\gamma mM}{r^2}, \qquad (81)$$

donde γ es la constante de gravitación universal.

www.FreeLibros.me

Apoyémonos en esta ley para describir el movimiento planetario. Supongamos que m es la masa de un planeta que se mueve alrededor del Sol y M es la masa del Sol. Para simplificar el modelo no tendremos en cuenta la influencia de otros planetas.

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares Oxy (fig. 29) de modo que el Sol se encuentre en el origen del sistema. Figurémonos que en el instante t el planeta se encuentra en el punto A de coordenadas variables x, y. La componente en el eje x de la fuerza de atracción F que actúa sobre el planeta es igual a $F\cos\varphi$, y la componente en el eje y es igual a $F\operatorname{sen}\varphi$. Por esto, empleando la fórmula (81) y el segundo principio de la dinámica, obtenemos las ecuaciones diferenciales de movimiento del planeta respecto a los ejes coordenados:

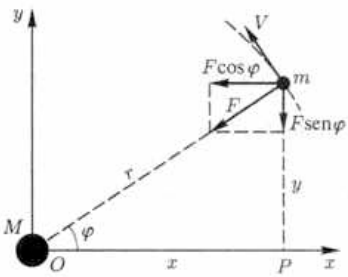

Fig. 29

$$m\ddot{x} = -F\cos\varphi = -\frac{\gamma mM}{r^2}\cos\varphi, \tag{82}$$

$$m\ddot{y} = -F\operatorname{sen}\varphi = -\frac{\gamma mM}{r^2}\operatorname{sen}\varphi. \tag{83}$$

Tomando en consideración que $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{y}{r}$ y $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, las ecuaciones (82) y (83) pueden escribirse en la forma

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{r^3},$$

donde la constante $k = \gamma M$.

www.FreeLibros.me

Finalmente, dado que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, llegamos a las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}. \tag{84}$$

No se pierde generalidad si suponemos que se cumplen las condiciones siguientes:

$$\begin{matrix} x = a, & y = 0, \\ \dot{x} = 0, & \dot{y} = v_0 \end{matrix} \quad \text{cuando} \quad t = 0 \text{ [5]}. \tag{85}$$

De esta forma, el problema se ha reducido al estudio de las ecuaciones (84) con las condiciones iniciales (85). Analizando las ecuaciones (84) se comprende que es más cómodo cambiar de coordenadas rectangulares a polares mediante las fórmulas $x = r\cos\varphi$, $y = r \operatorname{sen}\varphi$. Como resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - (r \operatorname{sen}\varphi)\dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \operatorname{sen}\varphi + (r\cos\varphi)\dot{\varphi}, \\ \ddot{x} &= \ddot{r}\cos\varphi - 2(\dot{r} \operatorname{sen}\varphi)\dot{\varphi} - (r \operatorname{sen}\varphi)\ddot{\varphi} - (r\cos\varphi)\dot{\varphi}^2, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \operatorname{sen}\varphi + 2(\dot{r}\cos\varphi)\dot{\varphi} + (r\cos\varphi)\ddot{\varphi} - (r \operatorname{sen}\varphi)\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \tag{86}$$

---

[5] N. del T. Dicho de otra manera, estamos asumiendo que en el instante inicial el planeta se encuentra sobre el eje x en el punto de coordenadas $(a, 0)$, y que sus velocidades en x e y son 0 y v_0, respectivamente.

www.FreeLibros.me

De aquí

$$\ddot{x} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\operatorname{sen}\varphi,$$
$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi})^2\operatorname{sen}\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\cos\varphi.$$

Con ayuda de estas dos igualdades las ecuaciones diferenciales (84) pueden escribirse en la forma

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\operatorname{sen}\varphi = -\frac{k\cos\varphi}{r^2}, \tag{87}$$

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\operatorname{sen}\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\cos\varphi = -\frac{k\operatorname{sen}\varphi}{r^2}. \tag{88}$$

Multiplicando la ecuación (87) por $\cos\varphi$, la ecuación (88) por $\operatorname{sen}\varphi$, y sumando los resultados, hallamos

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{89}$$

Si multiplicamos (87) por $\operatorname{sen}\varphi$ y (88) por $\cos\varphi$, y de la primera expresión obtenida restamos la segunda, obtenemos la ecuación

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{90}$$

Escribamos en coordenadas polares las condiciones iniciales (85):

$$\begin{aligned} r &= a, & \varphi &= 0, \\ \dot{r} &= 0, & \dot{\varphi} &= \frac{v_0}{a}, \end{aligned} \quad \text{cuando} \quad t = 0. \tag{91}$$

Así, el estudio de las ecuaciones (84) con las condiciones iniciales (85) se redujo al análisis de las ecuaciones (89) y (90) con las condiciones

www.FreeLibros.me

iniciales (91). No es difícil ver que la ecuación (90) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0, \tag{92}$$

de donde

$$r^2\dot{\varphi} = C_1. \tag{93}$$

La constante C_1 tiene un sentido geométrico interesante. A saber, imaginemos que un cuerpo se desplaza de un punto P a un punto Q por un arco $\widehat{PQ}$ (fig. 30). Sea S el área del sector limitado por los segmentos OP, OQ y el arco $\widehat{PQ}$. En tal caso, del curso de análisis matemático se sabe que

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\, d\varphi,$$

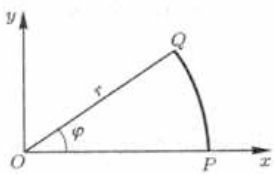

Fig. 30

o bien

$$dS = \frac{1}{2}r^2\, d\varphi.$$

Por ende,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}. \tag{94}$$

La derivada $\dfrac{dS}{dt}$ representa la llamada *velocidad areolar*. Y como la magnitud $r^2\dot{\varphi}$ es constante en virtud de la igualdad (93), deducimos que la velocidad areolar también es constante. Esto último significa

www.FreeLibros.me

que el cuerpo se mueve de tal manera que el vector de posición describe áreas iguales en intervalos de tiempo iguales. Esta *ley de las áreas* es justamente una de las tres leyes de Kepler, y su enunciado completo es el siguiente: *en intervalos de tiempo iguales, el vector de posición de un planeta barre áreas iguales.*

Para deducir la ley de Kepler sobre la forma de las trayectorias descritas por los planetas, regresemos a las ecuaciones (89) y (90) con las condiciones iniciales (91). En las condiciones iniciales (91) se tiene, en particular, que $r = a$ y $\dot{\varphi} = \dfrac{v_0}{a}$ para $t = 0$. Entonces de la igualdad (93) sigue que $C_1 = av_0$. Por tanto,

$$r^2\dot{\varphi} = av_0 \quad ó \quad \dot{\varphi} = \frac{av_0}{r^2}, \tag{95}$$

y la ecuación (89) se transforma en

$$\ddot{r} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Haciendo $\dot{r} = p$ podemos escribir la última ecuación así:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{dt} = p\frac{dp}{dr} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2},$$

o bien

$$p\frac{dp}{dr} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Separando las variables en esta ecuación diferencial e integrando, obtenemos

$$\frac{p^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{2r^2} + C_2.$$

www.FreeLibros.me

Ya que $p = \dot{r} = 0$ para $r = a$, de la última igualdad resulta

$$C_2 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a}.$$

De esta manera, llegamos a la ecuación

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a},$$

o, considerando solamente la raíz cuadrada positiva, a la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(v_0 - \frac{2k}{a}\right) + \frac{2k}{r} - \frac{a^2 v_0^2}{r^2}}. \tag{96}$$

Si ahora dividimos la ecuación (96) por la (95), obtenemos

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1},$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^3 v_0^2}, \quad \beta = \frac{k}{a^2 v_0^2}.$$

Para integrar esta última ecuación, hacemos el cambio de variable $r = \dfrac{1}{u}$, resultando

$$r = \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + e\cos\left(\varphi + C_3\right)},$$

www.FreeLibros.me

donde $e = \dfrac{\sqrt{\alpha+\beta^2}}{\beta} = \dfrac{av_0^2}{k} - 1$. La constante C_3 se determina de la condición $r = a$ para $\varphi = 0$. No es difícil comprobar que $C_3 = 0$.

De esta manera, hallamos finalmente que

$$r = \frac{a^2 v_0^2/k}{1 + e\cos\varphi}. \tag{97}$$

Del curso de geometría analítica se sabe que (97) es la ecuación en coordenadas polares de una sección cónica de excentricidad e. Por eso, la ecuación (97) puede ser:

1) una elipse si $e < 1$, es decir, si $v_0^2 < \dfrac{2k}{a}$;

2) una hipérbola si $e > 1$, es decir, si $v_0^2 > \dfrac{2k}{a}$;

3) una parábola si $e = 1$, es decir, si $v_0^2 = \dfrac{2k}{a}$;

4) una circunferencia si $e = 0$, es decir, si $v_0^2 = \dfrac{k}{a}$.

De las observaciones astronómicas se deduce que para todos los planetas del sistema solar la magnitud v_0^2 siempre es menor que $\dfrac{2k}{a}$. Así pues, llegamos a otra ley de Kepler: *las órbitas de los planetas son elipses en las que el Sol ocupa uno de los focos.*

Las órbitas de la Luna y de los satélites artificiales de la Tierra también son elipses, pero con excentricidades e muy cercanas a cero en la mayoría de los casos, es decir, son elipses que más bien parecen circunferencias.

www.FreeLibros.me

En cuanto a los cometas periódicos, tales como el cometa Halley, sus órbitas tienen formas de elipses alargadas con excentricidades muy cercanas a la unidad. En particular, el cometa Halley aparece en la zona de visibilidad de la Tierra aproximadamente cada 76 años. Fue visto por última vez a finales del año 1985 y comienzos de 1986.

Los cuerpos celestes con órbitas parabólicas o hiperbólicas se pueden observar sólo una vez, pues nunca regresan.

Averigüemos ahora el sentido físico de la excentricidad e. Previamente, nótese que la magnitud v del vector $\mathbf{V}$ de velocidad del planeta y las componentes $\dot{x}$ e $\dot{y}$ de dicho vector en los ejes x e y, satisfacen la igualdad

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

la cual, en virtud de las fórmulas (86), puede escribirse en la forma

$$v^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2.$$

De aquí se infiere que la energía cinética de un planeta de masa m se puede hallar mediante la fórmula

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right). \tag{98}$$

En cuanto a la energía potencial del sistema, ésta es igual al trabajo (tomado con signo "menos") necesario para desplazar el planeta hasta el infinito, donde la energía potencial es igual a cero. Por consiguiente,

$$-\int_r^\infty \frac{km}{r^2}\,dr = \left.\frac{km}{r}\right|_r^\infty = -\frac{km}{r}. \tag{99}$$

www.FreeLibros.me

Si denotamos con E la energía total del sistema, la cual es una magnitud constante en virtud de la ley de conservación de la energía, entonces de las fórmulas (98) y (99) obtenemos

$$\frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{r}^2\right)-\frac{km}{r}=E. \tag{100}$$

Haciendo $\varphi=0$ y utilizando las expresiones (97) y (100), hallamos

$$r=\frac{a^2v_0^2/k}{1+e}, \quad \frac{mr^2a^2v_0^2}{2r^4}-\frac{km}{r}=E.$$

Eliminando r de las dos últimas igualdades, llegamos a la siguiente expresión para la excentricidad:

$$e=\sqrt{1+E\,\frac{2a^2v_0^2}{mk^2}}\,.$$

Finalmente, la ecuación (97) de las órbitas planetarias toma la forma

$$r=\frac{a^2v_0^2/k}{1+\sqrt{1+E\,\dfrac{2a^2v_0^2}{mk^2}}\,\cos\varphi}.$$

De aquí se deduce que la órbita es una elipse, una hipérbola, una parábola o una circunferencia si $E<0$, $E>0$, $E=0$ ó $E=-\dfrac{mk^2}{2a^2v_0^2}$, respectivamente. De este modo, la órbita de un planeta está completamente determinada por su energía total E.

En particular, si un planeta, por ejemplo, la Tierra, pudiera obtener del exterior un impulso que le permitiera aumentar su energía

www.FreeLibros.me

total E hasta una magnitud positiva, entonces pasaría a una órbita hiperbólica y abandonaría nuestro sistema solar.

Dediquémonos ahora a la tercera ley de Kepler, la cual se refiere a los períodos de las órbitas planetarias. Partiendo de la segunda ley de Kepler nos restringiremos, naturalmente, a la órbita elíptica, cuya ecuación en coordenadas cartesianas es

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1.$$

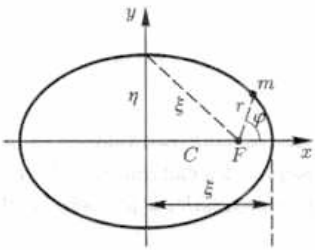

Fig. 31

La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{C}{\xi}$, pero como $C^2 = \xi^2 - \eta^2$ (fig. 31), entonces

$$e^2 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2},$$

o bien

$$\eta^2 = \xi^2\left(1 - e^2\right). \tag{101}$$

A partir de las igualdades (97), (101) y de las propiedades de la elipse, concluimos que

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 v_0^2/k}{1+e} + \frac{a^2 v_0^2/k}{1-e}\right) = \frac{a^2 v_0^2}{k(1-e^2)} = \frac{a^2 v_0^2 \xi^2}{k\eta^2},$$

es decir,

$$\eta^2 = \frac{a^2 v_0^2 \xi}{k}. \tag{102}$$

www.FreeLibros.me

Denotemos con T el período de revolución de un planeta, o sea, el tiempo que necesita el planeta para recorrer completamente la órbita. Dado que el área de la región limitada por la elipse es igual a $\pi\xi\eta$, basándonos en las fórmulas (94) y (95) deducimos que $\pi\xi\eta = \dfrac{av_0T}{2}$. Finalmente, teniendo en cuenta la igualdad (102), hallamos

$$T^2 = \frac{4\pi^2\xi^2\eta^2}{a^2v_0^2} = \frac{4\pi^2}{k}\xi^3.$$

Esta última fórmula es la expresión formal de la tercera ley de Kepler: *los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.*

19. Flexión de una viga

Consideremos una viga homogénea AB de sección transversal constante, colocada horizontalmente (fig. 32). El eje de simetría de la viga se indica en la figura 32 con una línea discontinua. Asumamos que la viga se flexiona bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre ella en el plano vertical que contiene al eje de simetría (fig. 33). Las fuerzas

Fig. 32

Fig. 33

a las que nos referimos puede ser el peso de la propia viga, una fuerza exterior aplicada a ésta o una combinación de ambas fuerzas. Es claro que como resultado de dichas fuerzas el eje de simetría se arquea. Al eje de simetría flexionado se le llama usualmente *línea*

www.FreeLibros.me

elástica. El estudio de las formas de las líneas elásticas desempeña un papel importante en la teoría de la elasticidad.

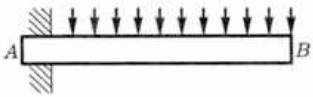

Fig. 34

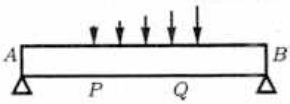

Fig. 35

Señalemos que las vigas se pueden diferenciar según la forma en que se sujetan o apoyan. Por ejemplo, en la figura 34 se muestra una viga con el extremo A fijo y el extremo B libre. Tales vigas se denominan *vigas de consola* (*cantilever*). En la figura 35 se ilustra una viga que yace libremente sobre los apoyos A y B. Otro tipo de viga con apoyos se muestra en la figura 36. También existe una clasificación de las formas de aplicación de las fuerzas exteriores sobre la viga. Por ejemplo, en la figura 34 las fuerzas están distribuidas uniformemente. Evidentemente, la fuerza puede ser variable a lo largo de toda la viga o en una parte de ésta (fig. 35). En la figura 36 se muestra el caso de una fuerza concentrada en un punto.

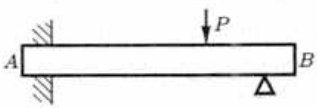

Fig. 36

Analicemos una viga horizontal OA (fig. 37). Supongamos que su eje de simetría (línea discontinua en la figura) se encuentra sobre el eje x. Orientemos el eje x hacia la derecha del origen de coordenadas O y el eje y hacia abajo. Bajo la acción de las fuerzas externas $F_1, F_2, \ldots$ (y del peso de la viga si éste es grande) el eje de simetría se flexiona formando una línea elástica como la indicada en la figura 38. El desplazamiento y de la línea elástica respecto al eje x se conoce

www.FreeLibros.me

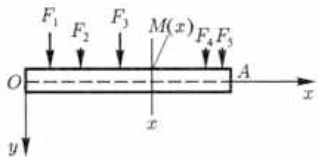

Fig. 37

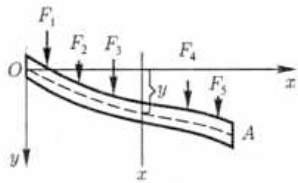

Fig. 38

como *flexión* de la viga en la posición x. De esta definición se induce que para hallar la flexión de una viga es suficiente conocer la ecuación de su línea elástica. Más adelante mostraremos cómo hacerlo en la práctica.

Representemos con $M(x)$ el momento flector en una sección transversal vertical de abscisa x de la viga. El momento flector es igual a la suma algebraica de los momentos de las fuerzas que actúan sobre uno de los lados de la viga respecto al punto x. Al calcular los momentos consideraremos que las fuerzas que actúan sobre la viga de abajo hacia arriba tienen momentos negativos, y las que actúan de arriba hacia abajo, momentos positivos.

En la teoría de resistencia de materiales se demuestra que el momento flector en la posición x está relacionado con el radio de curvatura de la línea elástica mediante la expresión

$$EJ\,\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = M(x), \tag{103}$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young y depende del material del cual está hecha la viga, J es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en la posición x respecto a la recta horizontal que pasa por el centro de gravedad de dicha sección

www.FreeLibros.me

transversal. El producto EJ se llama comúnmente *rigidez flexural;* en lo sucesivo asumiremos que su magnitud es constante.

Suponiendo que la viga se flexiona sólo un poco, lo que es muy frecuente en la práctica, entonces la pendiente y' de la línea elástica es muy pequeña y, en lugar de la ecuación (103), podemos tomar la ecuación aproximada

$$EJy'' = M(x). \tag{104}$$

Para mostrar cómo se utiliza la ecuación (104) en la práctica, examinemos el problema siguiente. Una barra homogénea de acero de longitud l, la cual está acostada libremente sobre dos apoyos, se flexiona bajo la acción de su propio peso, igual a p kilogramos de fuerza por unidad de longitud. Se pide hallar la ecuación de la línea elástica y la flexión máxima de la viga.

La línea discontinua de la figura 39 representa la línea elástica. Cada uno de los dos apoyos produce una reacción orientada hacia arriba e igual a la mitad del peso de la viga (igual a $\frac{pl}{2}$). El momento flector $M(x)$ es la suma algebraica de los momentos de estas fuerzas a un lado del punto Q (fig. 39). Calculemos primero la acción de las fuerzas a la izquierda del punto Q. A una distancia x del punto Q la fuerza $\frac{pl}{2}$ actúa sobre la viga de abajo hacia arriba generando un momento negativo, a la vez que la fuerza px, que actúa sobre la viga de arriba hacia abajo a una distancia $\frac{x}{2}$

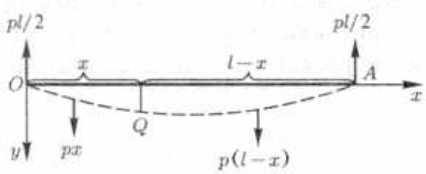

Fig. 39

www.FreeLibros.me

del punto Q, genera un momento positivo. Así, el momento flector resultante en el punto Q es

$$M(x) = -\frac{pl}{2}x + px\frac{x}{2} = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}. \tag{105}$$

Si tomamos la acción de las fuerzas a la derecha del punto Q, entonces a una distancia $\frac{l-x}{2}$ del punto Q, sobre la viga actúa una fuerza $p(l-x)$ de arriba hacia abajo generando un momento positivo, mientras que la fuerza $\frac{pl}{2}$, que actúa sobre la viga de abajo hacia arriba a una distancia $l-x$ del punto Q, genera una momento negativo. El momento flector resultante es

$$M(x) = p(l-x)\frac{l-x}{2} - \frac{pl}{2}(l-x) = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}. \tag{106}$$

Como se aprecia en las fórmulas (105) y (106), los momentos flectores son iguales en ambos casos. Sabiendo ya cómo se calcula el momento flector, podemos escribir la ecuación fundamental (104) para nuestro caso:

$$EJy'' = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}. \tag{107}$$

Teniendo presente que la viga no se flexiona en sus extremos O y A, para resolver la ecuación diferencial (107), es decir, para hallar y utilizaremos las condiciones en los extremos de la viga:

$$y = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0 \quad \text{para} \quad x = l.$$

www.FreeLibros.me

Integrando (107) y haciendo uso de las condiciones en los extremos de la viga, obtenemos

$$y = \frac{p}{24EJ}\left(x^4 - 2lx^3 + l^3x\right). \tag{108}$$

La ecuación (108) es la ecuación de la línea elástica. En las aplicaciones prácticas la fórmula (108) se usa para calcular la flexión máxima de la viga. En este ejemplo concreto, valiéndonos de la simetría del problema hallamos que la flexión máxima se da cuando $x = \frac{l}{2}$, y es igual a $\frac{5pl^4}{384EJ}$, donde $E = 21 \cdot 10^5 \ \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$, $J = 3 \cdot 10^4 \ \text{cm}^4$.

2 Transporte de madera

Al transportar troncos de árboles desde los aserraderos hasta las empresas madereras, los vehículos transportadores pasan obligatoriamente por caminos forestales. Comúnmente el ancho de un camino forestal no permite el paso de más de un vehículo. Con el fin de que puedan pasar dos vehículos que se mueven al encuentro, en el camino se construyen varias vías muertas. Eludamos la pregunta acerca del horario óptimo de trabajo que garantiza que los vehículos que van y vienen se encuentren precisamente en las vías muertas, y dediquémonos a establecer cuán anchas deben ser las curvas y qué trayectoria debe seguir el chofer en las curvas para que pueda transportar, por ejemplo, troncos de treinta metros de longitud. Al mismo tiempo, vamos a suponer que la capacidad de maniobrabilidad del vehículo es suficiente para que se pueda desplazar con facilidad en tramos de camino bastante limitados.

www.FreeLibros.me

Comúnmente, un vehículo transportador de madera se compone de un tractor y de un remolque, los cuales están enganchados de tal manera que pueden girar libremente uno respecto al otro. El tractor tiene un eje delantero libre y dos ejes traseros fijos, sobre los cuales se instala un soporte que gira libremente sobre su propio eje en un plano horizontal, y cuya función es sostener los troncos por uno de los extremos. El remolque, sujeto al tractor mediante un eje, posee sólo dos ejes traseros fijos y un soporte similar al del tractor para sujetar el segundo extremo de los troncos. El chasis del remolque consta de dos tubos metálicos, uno de los cuales puede entrar en el otro, permitiendo de esta manera que la longitud del chasis cambie durante el movimiento y que el tractor y el remolque se muevan independientemente. En la figura 40 se ilustra el esquema de un vehículo como el que acabamos de describir. En el esquema, los

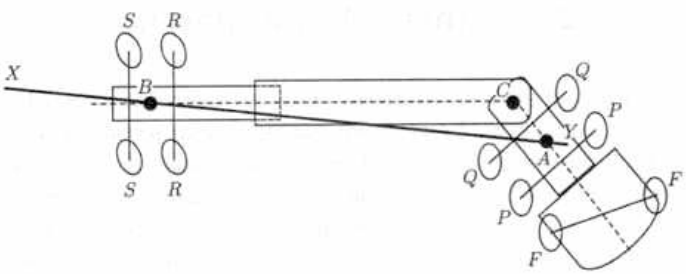

Fig. 40

puntos A y B representan los ejes de giro de los dos soportes, situados a una distancia h uno del otro. Mediante XY denotamos los troncos de árbol (para ellos $AX = \lambda h$). El punto C indica el eje que une el tractor con el remolque, siendo $AC = ah$ (usualmente $a = 0{,}3$ y en el caso más simple, $a = 0$). Además, FF es el eje delantero del tractor, PP, QQ son sus ejes traseros, y RR, SS son

www.FreeLibros.me

los ejes del remolque. Todos los ejes tienen la misma longitud $2L$. Supongamos que el ancho del vehículo también es igual a $2L$. Finalmente, asumiremos que el ancho de la parte trasera de la carga es $2W$. Más adelante necesitaremos el concepto de *envergadura de carga* del vehículo. Comúnmente se define la envergadura de carga como la desviación máxima de su parte trasera (del punto X del esquema) respecto a la trayectoria del vehículo. Consideremos que el ancho del camino es $2\beta h$ y las curvas tienen la forma de un arco de circunferencia de radio $\frac{h}{\alpha}$ y centro en el punto O (fig. 41). Para simplificar asumiremos que el vehículo cargado de troncos entra en la curva de tal manera que el tractor y el remolque se encuentran en línea recta, y el eje del soporte delantero (punto A) está exactamente sobre la línea media del camino. Como se aprecia en la figura 41, el punto A está determinado por el ángulo χ que forma el tractor AC con la dirección inicial. Definamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares Oxy de manera que el eje de las abscisas sea paralelo a la dirección inicial escogida. Denotemos con θ el ángulo que forma al haz de troncos con la dirección inicial. Por último, representando con u al ángulo BAC en la figura 41, obtenemos que $u = \chi - \theta$. Generalmente el ángulo u se conoce con el nombre de *ángulo de retraso* del vehículo. El semiancho requerido βh del camino se denomina *semiancho del camino en el lado exterior de la curva*. Este semiancho determina la envergadura de carga del

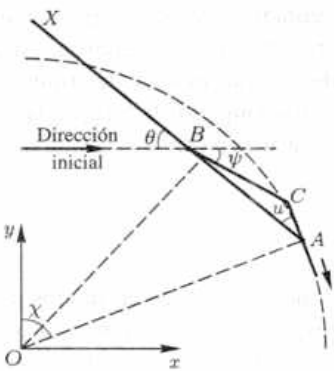

Fig. 41

www.FreeLibros.me

vehículo en la curva y es igual a la suma algebraica $OX - OA + W$. El *semiancho del camino en el lado interior de la curva* es la suma algebraica $OA + L - OP$, donde OP es la distancia desde el punto O hasta AB.

Supongamos que cuando el vehículo se desplaza las llantas no resbalan hacia los lados o que, en caso contrario, la desviación es muy pequeña. Esta condición garantiza que la línea media del tractor AC sea tangente al arco de la circunferencia en el punto A y, por lo tanto, OA sea perpendicular a AC y el ángulo χ quede definido todo el tiempo por el movimiento del punto A sobre el arco de la circunferencia. Al construir los caminos, la curvatura de las curvas está determinada por el ángulo N correspondiente a una longitud de arco de la curva aproximadamente igual a 30 m. De acuerdo con la notación que hemos adoptado,

$$N = \frac{180^\circ}{\pi}\frac{30\alpha}{h}, \tag{109}$$

donde h se mide en metros. Por ejemplo, para $h = 9$ m y $\alpha = 0{,}1$ resulta $N \approx 19^\circ$. Si $h = 12$ y $\alpha = 1{,}0$, entonces $N \approx 142^\circ$. Como indica la práctica, se deben considerar solamente los valores de α que satisfagan la condición $0 < \alpha < 1$, pero tan cercanos a 1 como se pueda, con el fin de aumentar la posibilidad de maniobrabilidad del vehículo.

La longitud λh de cada tronco es mayor que h, pero partiendo nuevamente de consideraciones prácticas, no debe superar $3h$. Así, los valores de λ satisfacen la condición $1 < \lambda < 3$. En cuanto a la constante a, se supone que $0 \leqslant a < 0{,}5$. Finalmente, la magnitud de h depende de cada caso concreto, aunque varía dentro de los límites 9–12 m.

www.FreeLibros.me

Puesto que las llantas del tractor no resbalan lateralmente, las coordenadas del punto A en la figura 41 son

$$x = \frac{h}{\alpha} \operatorname{sen} \chi, \quad y = \frac{h}{\alpha} \cos \chi,$$

y las del punto B son

$$\begin{aligned} X &= \frac{h}{\alpha} \operatorname{sen} \chi - h \cos \theta, \\ Y &= \frac{h}{\alpha} \cos \chi + h \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \tag{110}$$

Como las llantas del remolque tampoco resbalan, el punto B se mueve en las dirección BC y

$$\frac{dY}{dX} = -\operatorname{tg} \psi, \tag{111}$$

donde ψ es el ángulo que forma BC con la dirección inicial. Con ayuda de la igualdad $\chi = u + \theta$, del triángulo ABC obtenemos las igualdades

$$\frac{\operatorname{sen}(\chi - \psi)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(\theta - \psi)}{ah} = \frac{\operatorname{sen} u}{bh}, \tag{112}$$

donde $0 < b < 1$ y los ángulos ψ, θ y u son funciones de χ. Valiéndonos de (110) y (111), obtenemos

$$\left(-\frac{h}{\alpha} \operatorname{sen} \chi + h \frac{d\theta}{d\chi} \cos \theta\right) \cos \psi + \\ + \left(\frac{h}{\alpha} \cos \chi + h \frac{d\theta}{d\chi} \operatorname{sen} \theta\right) \operatorname{sen} \psi = 0.$$

www.FreeLibros.me

Simplificando la última igualdad resulta

$$\operatorname{sen}(\chi - \psi) = \alpha \frac{d\theta}{d\chi} \cos(\theta - \psi). \tag{113}$$

Sustituyendo ψ de (112) en la ecuación (113) y teniendo presente la igualdad $\chi = u + \theta$ y que $\theta = 0$ para $\chi = 0$, llegamos a la ecuación diferencial[6)]

$$\frac{du}{d\chi} = 1 - \frac{\operatorname{sen} u}{\alpha(1 - a\cos u)} \tag{114}$$

con la condición inicial $u(0) = 0$. En esta ecuación, el ángulo de retraso u cumple el papel de función incógnita.

La ecuación diferencial (114) se puede integrar con ayuda del cambio de variable $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = v$, pero la relación entre las variables u y χ que se obtiene en la respuesta es tan compleja que el análisis siguiente se dificulta considerablemente. Por esta razón, se recomienda utilizar algún método numérico de resolución para obtener una solución, aunque sea aproximada[7)].

En la figura 42 se muestran los gráficos de la solución correspondientes a diferentes valores de α ($a = 0{,}3$). En ellos se ve cómo varía el

---

[6)] *Tayler A. B.* The Sweep of a Logging Truck // Math. Spectrum. 1974–1975. V. 7, № 1. P. 19–26.

[7)] N. del T. En el original en ruso el autor resuelve la ecuación (114) por el método de Runge—Kutta de segundo orden, utilizando para ello la calculadora "ELEKTRONIKA BZ-34". En lugar de esto, se puede hacer uso de alguno de los programas matemáticos disponibles en el mercado, tales como MAPLE, MATHEMATICA, etcétera.

www.FreeLibros.me

ángulo de retraso u respecto al ángulo χ. Para una mejor ilustración, se han tomado escalas diferentes en los ejes u y χ.

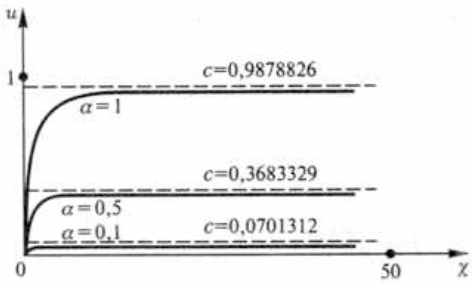

Fig. 42

Hallemos ahora la envergadura de carga del vehículo, empleando para ello el semiancho del camino en el lado exterior de la curva, el cual, como vimos, es igual a la suma algebraica $OX - OA + W$ (fig. 41). Hallemos ante todo

$$OX^2 = \left(\frac{h}{\alpha}\operatorname{sen}\chi - \lambda h\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{h}{\alpha}\cos\chi + \lambda h\operatorname{sen}\theta\right)^2 =$$
$$= h^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \lambda^2 - 2\frac{\lambda}{\alpha}\operatorname{sen}u\right).$$

De aquí se deduce que la envergadura de carga decrece con el aumento de χ, ya que crece el ángulo de retraso u. Consiguientemente, el semiancho máximo del camino βh se calcula con la fórmula

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{\alpha^2}} - \frac{1}{\alpha} + \frac{W}{h}.$$

www.FreeLibros.me

Las líneas continuas en la figura 43 corresponden a los diagramas que relacionan las variables $\beta - \dfrac{W}{h}$ y α para diferentes valores de λ. Las líneas discontinuas muestran cuál debe ser el valor de $\beta - \dfrac{L}{h}$

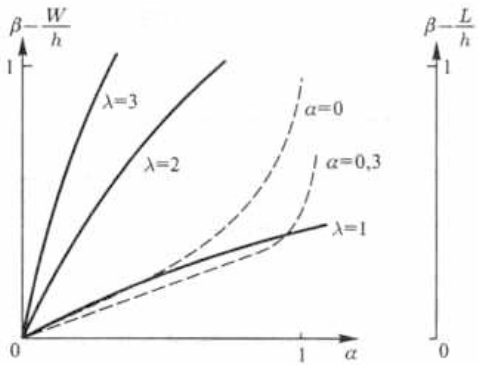

Fig. 43

para obtener la "holgura" necesaria en el lado interior de la curva. Además, en cualquier posición que ocupe el vehículo en la curva debe verificarse la condición

$$\beta = \frac{1}{\alpha}(1 - \cos u) + \frac{L}{h} < \frac{1}{\alpha}(1 - \cos C) + \frac{L}{h}, \qquad (115)$$

donde C es el valor límite de la solución. El número C se halla a partir de la condición

$$\alpha(1 - a \cos C) = \operatorname{sen} C,$$

www.FreeLibros.me

que conduce a la fórmula

$$C = \operatorname{arcsen} \frac{\alpha\left(1 - a\sqrt{1 - \alpha^2 + a^2\alpha^2}\right)}{1 + a^2\alpha^2}.$$

Dado que el valor de C decrece al disminuir a, entonces en el caso simple, cuando el vehículo consta de una sola pieza ($a = 0$), el ángulo de retraso es máximo, y de la condición (115) hallamos

$$\beta - \frac{L}{h} < \frac{1}{\alpha}(1 - \cos C)\Big|_{a=0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

Finalmente, veamos las conclusiones que se infieren de los razonamientos expuestos hasta el momento. Primero que todo, pasemos a un caso típico que ilustra los resultados obtenidos.

Si la distancia entre los soportes de los troncos es igual a 12 m y el vehículo pasa por una curva en forma de arco de circunferencia de 60 m de radio, entonces $\alpha = 0{,}2$ y, en virtud de la fórmula (109), la curva es de aproximadamente 28°. Si bajo estas condiciones el ancho del vehículo es 2,4 m y el ancho de la parte posterior del haz de troncos es 1,2 m, entonces, dado que los troncos tienen una longitud de 24 m (un extremo del haz reposa sobre el soporte delantero), concluimos que $\lambda = 2$, $\frac{W}{h} = 0{,}05$ y $\frac{L}{h} = 0,1$. Así, de la figura 43 se infiere que para todo valor de a se tiene que $\beta = 0{,}45$ para el lado exterior de la curva y $\beta = 0{,}2$ para el lado interior. Teóricamente, el semiancho necesario del camino en el lado exterior de la curva es 5,4 m y en el lado interior es 2,4 m. Si los troncos miden 14,4 m de longitud a partir del soporte delantero y el ancho del extremo posterior del haz de troncos es igual a 1,8 m, entonces $\lambda = 1{,}2$.

www.FreeLibros.me

El valor de β en este caso es igual a 0,22 para los lados exterior e interior de la curva. Por esto, el semiancho necesario del camino en el lado exterior de la curva es igual a 2,64 m y en el lado interior, como sucedió en el caso anterior, a 2,4 m. De estos razonamientos se deduce que mientras más larga sea la carga, más ancho deberá ser el camino en las curvas. En particular, comparando los dos casos recién examinados vemos que un aumento de la longitud de los troncos en 9,6 m exige un aumento del ancho de las curvas en 2,76 m para que el chofer pueda conducir el vehículo en la curva siguiendo una línea cuya longitud es aproximadamente igual a la longitud de la línea media del camino. La práctica demuestra que para un chofer con poca experiencia el ancho total del camino en la curva debe ser de 10,8 m como mínimo (para una carga de 24 m de longitud y un ancho del vehículo igual a 2,4 m).

La teoría desarrollada aquí muestra que la máxima envergadura de la carga se obtiene cuando el vehículo entra en la curva, ya que precisamente en este momento el ángulo de retraso aumenta. La misma afirmación es válida en un punto de inflexión cuando el vehículo pasa en zigzag de una curva a otra. Los resultados ilustrados en la figura 43 corresponden al caso en que el tractor y el remolque están en línea recta antes de entrar en la curva. Pero si hay un ángulo inicial de retraso C_0 debido a un zigzag de la curva, entonces la condición inicial en la ecuación diferencial (114) debe tener la forma $u(0) = -C_0$. En este caso, el ancho necesario del camino se halla con la fórmula

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2\,\frac{\lambda}{\alpha}\,\operatorname{sen} C_0} - \frac{1}{\alpha} + \frac{W}{h}.$$

Destaquemos que en el caso de un remolque simple, o sea, cuando $a = 0$, es imposible vencer la curva si $\alpha > 1$. Sin embargo, pa-

www.FreeLibros.me

ra valores relativamente grandes de a el parámetro α ya puede tomar valores mayores que 1, siempre que satisfagan la igualdad $\alpha(1 - a\cos C) = \operatorname{sen} C$. Así pues, α tiene el valor máximo $\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ y para el valor práctico extremo $a = 0{,}5$ tenemos $\alpha = 1{,}25$.

A modo de conclusión, señalemos que para los valores de α mayores que 0,5 es posible lograr una economía considerable del ancho del camino aumentando el valor de a (fig. 43), y para una carga tal que λ sea no mucho mayor que $\lambda = 1$, el valor de a se elige de manera que el semiancho requerido del camino en el lado interior de toda curva siempre sea menor que en el lado exterior.

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 2

Métodos cualitativos de análisis de modelos diferenciales

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

En la primera parte del libro formulamos algunos problemas y construimos sus modelos diferenciales. Y gracias a que pudimos *integrar* las ecuaciones diferenciales obtenidas, logramos responder satisfactoriamente a las preguntas planteadas. Sin embargo, como se indicó en el prólogo, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden se integradas mediante funciones elementales. Por esta razón, al examinar muchos modelos diferenciales de fenómenos y procesos reales, es necesario recurrir a métodos que proporcionen la información necesaria a partir de las propiedades de la ecuación diferencial, sin tener que resolverla.

En este capítulo mostraremos ejemplos concretos de aplicación de los procedimientos y métodos elementales de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias a la resolución de problemas prácticos.

1. Curvas a lo largo de las cuales la dirección de la aguja magnética no varía

En los procesos de *integración cualitativa*, cuya esencia consiste en esclarecer el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones

www.FreeLibros.me

diferenciales ordinarias, a veces resulta provechoso utilizar una propiedad común de las ecuaciones diferenciales, análoga a la propiedad que posee el campo magnético en la superficie de la Tierra: *sobre la superficie terrestre se pueden indicar curvas a lo largo de las cuales la dirección de la aguja magnética es constante.*

Analicemos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{116}$$

donde la función f es unívoca y continua respecto a las variables x e y en cierta región D del plano (x, y). La ecuación diferencial (116) le asigna a cada punto $M(x, y)$ del dominio D de la función f el valor $\frac{dy}{dx}$, es decir, la pendiente K de la tangente a la curva integral en el punto $M(x, y)$. En vista de esto, se dice que la ecuación diferencial (116) determina una *dirección* o *elemento lineal* en todo punto $M(x, y)$ de la región D. El conjunto de todos los elementos lineales en D se conoce con el nombre de *campo direccional* o *campo de elementos lineales*. Gráficamente, un elemento lineal se puede representar mediante un segmento (del que $M(x, y)$ es un punto interior) cuyo ángulo θ con la dirección positiva del eje x satisface la relación $K = \operatorname{tg} \theta = f(x, y)$. De aquí se infiere que, geométricamente, la ecuación diferencial (116) expresa el hecho de que *la dirección de la tangente coincide con la del campo en cada punto de la curva integral.*

Los campos direccionales se pueden construir con ayuda de *isoclinas* (del griego *isos* — igual, y *klino* — inclinar), las cuales son conjuntos de puntos del plano (x, y) en los que la dirección del campo determinado por la ecuación diferencial (116) permanece constante. En el caso del campo magnético en la superficie terrestre, una isoclina

www.FreeLibros.me

es una curva a lo largo de la cual la dirección de la aguja magnética se mantiene invariable.

La familia de isoclinas de la ecuación diferencial (116) está dada por la ecuación

$$f(x, y) = \nu,$$

donde ν es un parámetro real variable.

Conociendo las isoclinas de una ecuación diferencial podemos obtener una información aproximada del comportamiento de sus curvas integrales. Examinemos, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

no integrable mediante funciones elementales. La familia

$$x^2 + y^2 = \nu \quad (\nu > 0)$$

de isoclinas de la ecuación dada está constituida por circunferencias concéntricas del plano (x, y), de radios $\sqrt{\nu}$ y centros en el origen de coordenadas. La pendiente de la tangente a cada curva integral en todo punto de toda isoclina es igual al cuadrado de la longitud del radio de dicha isoclina. Esta información es suficiente para hacernos una idea sobre el comportamiento de las curvas integrales de la ecuación diferencial examinada (fig. 44).

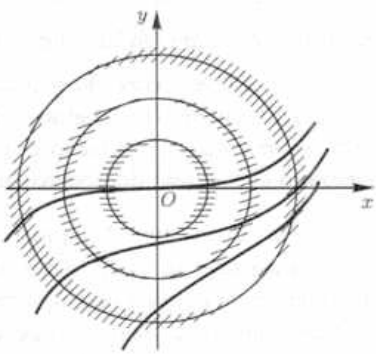

Fig. 44

Gracias a que este ejemplo es bastante sencillo hemos logrado establecer sin mucha dificultad cómo se comportan las soluciones

www.FreeLibros.me

de la ecuación diferencial; pero aun en casos de ecuaciones más complicadas puede resultar útil conocer sus isoclinas.

Veamos ahora un método geométrico de integración de las ecuaciones diferenciales del tipo (116), método que está basado en las propiedades geométricas de las curvas

$$f(x, y) = 0, \tag{I_0}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) = 0. \tag{L}$$

Todos los puntos de las curvas con isoclinas nulas definidas por la ecuación (I_0) cumplen la condición $\frac{dy}{dx} = 0$. Esto significa que los puntos de dichas curvas bien podrían ser puntos de máximo o de mínimo de las curvas integrales de la ecuación diferencial inicial. Ésta es precisamente la razón por la que vale la pena analizar por separado el conjunto de isoclinas nulas.

Con el fin de mejorar la aproximación en la construcción de las curvas integrales se suele hallar también el conjunto de sus puntos de inflexión (si es que existen). Como se sabe, los puntos de inflexión se deben buscar haciendo uso de la condición $y'' = 0$. Derivando la ecuación (116) y despejando y'', se obtiene

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y).$$

Esto indica que las líneas dadas por la ecuación (L) son las posibles líneas de puntos de inflexión[1]. En particular, se deduce que *todo*

[1] Estamos suponiendo que las curvas integrales que llenan cierta región poseen la propiedad de que por cada punto de dicha región pasa una sola curva integral.

www.FreeLibros.me

punto de inflexión de una curva integral es un punto de tangencia de la curva integral con una isoclina.

Las curvas de extremos (de puntos de máximo o mínimo) y de puntos de inflexión de las curvas integrales dividen el campo de definición de la función f en subregiones $S_1, S_2, \ldots, S_m$ donde la primera y segunda derivadas de la solución de la ecuación diferencial tienen signos determinados. En cada caso concreto, hallando estas regiones podemos construir un esquema del comportamiento de las curvas integrales.

Como ejemplo, consideremos la ecuación diferencial $y' = x + y$.

La ecuación correspondiente de la curva (I_0) es $x + y = 0$, ó $y = -x$. Comprobando directamente vemos que la curva (I_0) no es una curva integral. En cambio, la curva (L), cuya ecuación es $y + x + 1 = 0$, sí es una curva integral de la ecuación dada y, por tanto, no es una línea de puntos de inflexión.

Las rectas (I_0) y (L) dividen el plano (x, y) en tres subregiones (fig. 45): la región S_1 $(y' > 0,\ y'' > 0)$ a la derecha de la recta (I_0); la región S_2 $(y' < 0,\ y'' > 0)$ entre las rectas (I_0) y (L), y la región S_3 $(y' < 0,\ y'' < 0)$ a la izquierda de la recta (L). Los puntos de la recta (I_0) son puntos de mínimo de las curvas integrales. A la derecha de (I_0) las curvas integrales crecen y a la izquierda, decrecen (en la figura 45 de izquierda a derecha). No hay puntos de inflexión. A la derecha de la recta (L) las curvas son convexas hacia abajo, y a la izquierda, convexas hacia arriba. El comportamiento general de las curvas integrales se ilustra en la figura 45.

Nótese en este ejemplo que la recta integral (L) es una especie de curva "divisoria", puesto que separa una familia de curvas integrales

www.FreeLibros.me

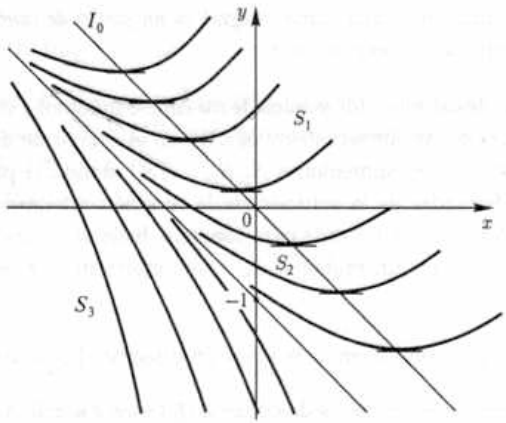

Fig. 45

de la otra. Tales curvas se suelen llamar *separatrices* (del término latino *separator*).

2. ¿Necesitan los ingenieros los teoremas de existencia y unicidad?

En la sección anterior, al referirnos a las isoclinas y líneas de puntos de inflexión supusimos tácitamente que la ecuación diferencial considerada tiene solución. La respuesta a la pregunta sobre la existencia y la unicidad de las soluciones se encuentra en los denominados *teoremas de existencia y unicidad,* importantes no sólo en la teoría, sino en la práctica.

www.FreeLibros.me

La importancia de los teoremas de existencia y unicidad radica en que nos dicen si tiene o no sentido aplicar los métodos cualitativos de la teoría de las ecuaciones diferenciales en el proceso de resolución de problemas concretos (de las ciencias naturales o de la técnica) cuyos modelos matemáticos contienen ecuaciones diferenciales; también son importantes porque sirven de base para la obtención de nuevos métodos y teorías. A menudo, las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad tienen implícitos métodos de búsqueda aproximada de las soluciones con cualquier grado de precisión. Por esto es que los teoremas de existencia y unicidad juegan un papel fundamental tanto en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales como en los métodos numéricos de resolución.

En la actualidad existe una gran variedad de métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales. A pesar de que estos métodos tienen el defecto de que cada vez que se aplican dan una sola solución numérica concreta —lo que restringe su uso—, ellos son utilizados ampliamente en la práctica. Señalemos, además, que con el fin de evitar interpretaciones y conclusiones erróneas en los procesos de integración numérica de las ecuaciones diferenciales, ésta debe estar precedida por la verificación de los teoremas de existencia y unicidad.

Antes de mostrar dos ejemplos sencillos[2)] que ilustran y explican los comentarios anteriores, enunciemos una de las variantes de los teoremas de existencia y unicidad.

[2)] *Roberts C. E., Jr.* Why teach existence and uniqueness theorems in the first course in ordinary differential equations? // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1976. V. 7, № 1. P. 41–44.

www.FreeLibros.me

Teorema de existencia. *Si la función $f(x, y)$ de la ecuación* (116) *está definida y es continua en cierta región acotada D del plano (x, y), entonces para todo punto $(x_0, y_0) \in D$ existe una solución $y(x)$ del problema de valores iniciales*[3)]

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{117}$$

definida en cierto intervalo que contiene el punto x_0.

Teorema de existencia y unicidad. *Si en cierta región acotada D del plano (x, y) la función $f(x, y)$ de la ecuación* (116) *está definida, es continua y satisface la condición de Lipschitz*

$$\left|f(x, y_2) - f(x, y_1)\right| < L|y_2 - y_1|$$

respecto a la variable y, donde L es una constante positiva, entonces para todo punto $(x_0, y_0) \in D$ existe una única solución $y(x)$ del problema de valores iniciales (117) *definida en cierto intervalo que contiene al punto x_0.*

Teorema de prolongación. *Bajo las condiciones del teorema de existencia o del teorema de existencia y unicidad, toda solución de la ecuación* (116) *con las condiciones iniciales $(x_0, y_0) \in D$, puede ser prolongada hasta un punto tan cercano como se quiera de la frontera de la región D. En el primer caso la prolongación no es necesariamente unívoca, mientras que en el segundo caso sí lo es.*

[3)] Un problema consistente en hallar la solución de una ecuación diferencial que satisfaga cierta *condición inicial* (en este caso, la condición $y(x_0) = y_0$), se llama *problema de valores iniciales* o *problema de Cauchy*.

www.FreeLibros.me

Ahora sí veremos un ejemplo. Resolver el problema de valores iniciales

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(-1) = 0{,}21, \tag{118}$$

en el intervalo $[-1, 3]$ por el método iterativo de Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

con paso $h = 0{,}1$.

La ecuación $y' = -\dfrac{x}{y}$ sirve de modelo diferencial, entre otros, al problema que se examinará en la página 140 y que está relacionado a un sistema conservativo constituido por un cuerpo que se mueve siguiendo trayectorias horizontales en el vacío bajo la acción de resortes lineales.

Para resolver el problema (118) por el método de Euler se puede escribir un programa en algún lenguaje de programación o utilizar uno de los muchos programas matemáticos disponibles en el mercado. En última instancia se puede acudir a un proceso manual. En todo caso obtendremos una tabla como la siguiente:

x	$-1{,}0$	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$
$y(x)$	0,210	0,686	0,817	0,915	0,992	1,052	1,100	1,136	1,163

x	$-0{,}1$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$y(x)$	1,180	1,188	1,188	1,180	1,163	1,137	1,102	1,056	1,000

www.FreeLibros.me

x	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$y(x)$	0,930	0,844	0,737	0,601	0,418	0,131	−0,859	−0,696	−0,480

x	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
$y(x)$	−0,146	1,014	0,837	0,609	0,281	−0,465	0,007	−31,625

En la figura 46 se ilustran los resultados.

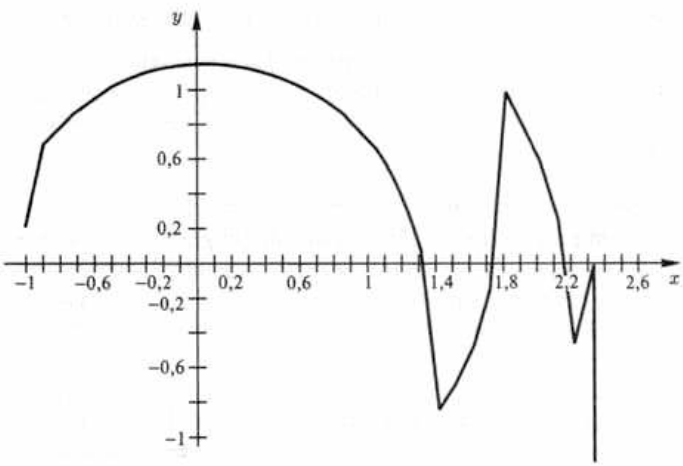

Fig. 46

Remitámonos ahora al teorema de existencia. La función $f(x, y) = -\dfrac{x}{y}$ del problema de valores iniciales (118) está definida y es continua en todo el plano (x, y), salvo en los puntos del eje Ox. Por consiguiente,

www.FreeLibros.me

conforme al teorema de existencia, existe una solución $y(x)$ del problema inicial (118) definida en cierto intervalo que contiene al punto $x_0 = -1$; de acuerdo con el teorema de prolongación, dicha solución puede ser prolongada hasta un valor $y(x)$ cercano a $y(x) = 0$.

El método de Euler nos permitió hallar una solución del problema de valores iniciales (118) en cierto intervalo (a, b) (donde $a < -1$ y $1{,}3 < b < 1{,}4$). No obstante, el intervalo real de existencia de la solución del problema inicial (118) se puede establecer partiendo de las características concretas de la ecuación diferencial. De hecho, por cuanto la ecuación es de variables separables, tenemos

$$\int_{0{,}21}^{y} \eta \, d\eta = -\int_{-1}^{x} \xi \, d\xi.$$

Integrando hallamos la solución

$$y = \sqrt{1{,}0441 - x^2}.$$

Se puede apreciar que la solución del problema (118) existe solamente en el intervalo abierto $|x| < \sqrt{1{,}0441} \approx 1{,}0218$.

De este modo, gracias al teorema de existencia (y al teorema de prolongación) pudimos eliminar el intervalo donde el problema dado no tiene solución. Esto muestra que utilizando solamente la integración numérica podemos llegar a resultados incorrectos. Lo que ocurre en este ejemplo es que cerca del eje x la pendiente de la solución $y = y(x)$ se aproxima mucho a $180°$. A causa de esto, mientras la variable independiente x cambia 0,1 unidades, la función y logra "saltar" al otro lado del eje x y cae sobre una curva integral diferente de la inicial. Esto sucede porque en cada iteración

www.FreeLibros.me

el método de Euler considera únicamente la pendiente en el punto analizado.

El ejemplo siguiente es aún más aleccionador.

Resolver el problema de valores iniciales

$$y' = 3x\sqrt[3]{y}, \quad y(-1) = -1 \tag{119}$$

en el intervalo $[-1,1]$, primero por el método de Euler con paso $h = 0{,}1$ y, después, por el método mejorado de Euler, con el mismo paso.

Recordemos que la sucesión de aproximaciones del método mejorado de Euler se calcula con la fórmula recurrente

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}),$$

donde

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{hf(x_i, y_i)}{2}.$$

La tabla siguiente presenta los resultados obtenidos por el método de Euler:

x	$-1{,}0$	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$
$y_1(x)$	$-1{,}000$	$-0{,}7000$	$-0{,}460$	$-0{,}275$	$-0{,}138$	$-0{,}045$	$-0{,}008$
x	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$0{,}0$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$
$y_1(x)$	$-0{,}016$	$0{,}007$	$-0{,}005$	$0{,}000$	$0{,}000$	$0{,}003$	$0{,}011$

www.FreeLibros.me

x	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_1(x)$	0,031	0,068	0,129	0,220	0,347	0,516	0,732

En la figura 47 se puede apreciar la solución aproximada del problema (118).

Los cálculos correspondientes al método mejorado de Euler se exponen en la tabla siguiente:

x	−1,0	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,5	−0,4
$y_2(x)$	−1,000	−0,730	−0,514	−0,346	−0,219	−0,129	−0,068
x	−0,3	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3
$y_2(x)$	−0,031	−0,012	−0,004	−0,002	−0,004	−0,013	−0,033
x	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_2(x)$	−0,071	−0,133	−0,225	−0,352	−0,522	−0,739	−1,010

El gráfico de la solución obtenida por el método mejorado de Euler se muestra en la figura 48. Un hecho asombroso que se percibe inmediatamente es la gran diferencia entre las soluciones representadas en las figuras 47 y 48.

Con el objeto de aclarar la causa de tal diferencia, integremos la ecuación inicial. Separando las variables, tenemos

www.FreeLibros.me

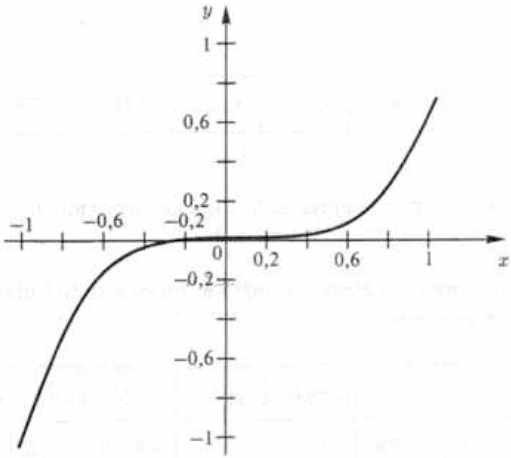

Fig. 47

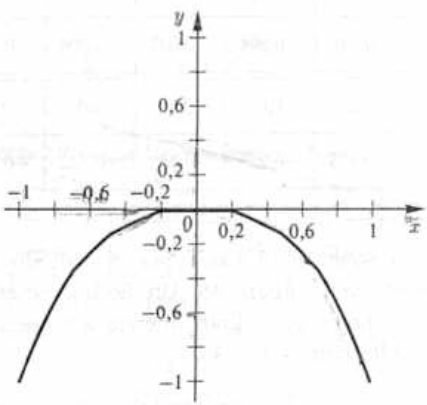

Fig. 48

www.FreeLibros.me

$$\int_{-1}^{y} \eta^{-1/3}\, d\eta = 3\int_{-1}^{x} \xi\, d\xi,$$

de donde

$$y = \pm x^3.$$

Aquí se ve claramente que con el método de Euler aproximamos la función $y_1(x) = x^3$, mientras que con el método mejorado de Euler, la función

$$y_2(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ -x^3 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Pero tanto y_1 como y_2 son soluciones del problema inicial (119), así que en el intervalo $[1, -1]$ la solución de este problema no es única.

Utilizando ahora el teorema de existencia y unicidad, lo primero que notamos es que el problema (119) tiene solución en cierto intervalo que contiene al punto $x_0 = -1$, puesto que la función $f(x, y) = 3x\sqrt[3]{y}$ es continua en todo el plano (x, y). Por el teorema de prolongación, dicha solución se puede prolongar en un intervalo cualquiera. Además, como $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xy^{-2/3}$, la función $f(x, y) = 3x\sqrt[3]{y}$ satisface la condición de Lipschitz respecto a la variable y en toda región que no contenga puntos del eje x. Se puede demostrar que la función $f(x, y)$ no satisface la condición de Lipschitz en regiones que contienen puntos del eje x. Resumiendo, del teorema de existencia y unicidad (y del teorema de prolongación) se deduce que la solución del problema (119) se puede prolongar de manera única, al menos hasta el eje x. Sin embargo, ya que la recta $y = 0$ es una solución singular de la ecuación diferencial $y' = 3x\sqrt[3]{y}$, apenas y se iguale a cero,

www.FreeLibros.me

la solución del problema (119) ya no podrá ser prolongada de manera única más allá del punto $O(0, 0)$.

Así pues, con ayuda del teorema de existencia y unicidad (y del teorema de prolongación) pudimos interpretar correctamente los resultados de la aplicación del método numérico de Euler. Concretamente, concluimos que sólo en el intervalo $[-1, 0]$ el problema de valores iniciales (119) tiene una solución única.

3. Interpretación dinámica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

Consideremos la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{120}$$

uno de cuyos casos particulares es la ecuación diferencial de segundo orden obtenida en la página 66 cuando analizamos el problema del reloj de péndulo.

La ecuación (120) también sirve de modelo diferencial de un sistema dinámico simple constituido por una partícula de masa unidad que se desplaza a lo largo del eje x (fig. 49) bajo la acción de una fuerza $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. A cada par de valores de las magnitudes x y $\frac{dx}{dt}$ que caracterizan el estado del sistema en todo instante, le corresponde

www.FreeLibros.me

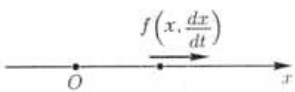

Fig. 49

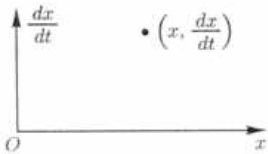

Fig. 50

un punto del *plano de estados* o *plano de fase* $\left(x, \dfrac{dx}{dt}\right)$ (fig. 50). El plano de fase es una representación del conjunto de todos los estados posibles del sistema dinámico, con la propiedad de que a cada nuevo estado del sistema le corresponde un punto diferente del plano de fase. Así pues, a la variación de estados de un sistema se le puede poner en correspondencia el movimiento de cierto punto en el plano de fase. Tal punto recibe el nombre de *punto imagen*. La trayectoria del punto imagen se denomina *trayectoria de fase* y la velocidad del punto, *velocidad de fase*.

Mediante el cambio de variables $y = \dfrac{dx}{dt}$ la ecuación (120) se reduce al sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y). \tag{121}$$

Considerando la variable t como un parámetro, la solución del sistema (121) es un par de funciones $x(t)$, $y(t)$ que determinan cierta curva (*trayectoria de fase*) en el plano de fase (x, y).

El sistema (121), al igual que el sistema más general

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{122}$$

www.FreeLibros.me

donde las funciones X e Y son continuas junto con sus derivadas parciales en cierta región D, se caracteriza por la propiedad siguiente: si $x(t)$, $y(t)$ es solución del sistema (121), entonces

$$x = x(t + C), \quad y = y(t + C), \tag{123}$$

donde C es una constante arbitraria real, también es solución de (121). Sin embargo, a toda la familia de soluciones de (123) le corresponde una sola trayectoria en el plano de fase (x, y). Es más, dos trayectorias de fase con puntos comunes coinciden. Por otra parte, al crecimiento y decrecimiento del parámetro t le corresponden sentidos diferentes de movimiento del punto imagen por su trayectoria. Dicho de otra forma, la trayectoria de fase es una curva orientada. En las figuras este hecho se ilustrará con ayuda de flechas sobre los gráficos de las trayectorias de los puntos imagen.

Los sistemas tipo (122) pertenecen a la familia de los denominados *sistemas diferenciales autónomos* o *sistemas diferenciales estacionarios*, que no son más que sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con segundos miembros que no dependen explícitamente del tiempo t. Si al menos uno de los segundos miembros del sistema depende explícitamente del tiempo t, el sistema se denomina *sistema no autónomo* o *sistema no estacionario*.

A cada solución periódica no constante $x(t)$ de la ecuación (120) le corresponde una curva simple cerrada (una curva cerrada sin autointersecciones) en el plano de fase (x, y). El recíproco de esta afirmación también es cierto.

Supongamos que el sistema diferencial (122) está dado en todo el plano (x, y). Entonces, en general, las trayectorias de fase cubren completamente el plano de fase sin cortarse la una con la otra.

www.FreeLibros.me

En caso de que en cierto punto $M_0(x_0, y_0)$ se cumplan las igualdades

$$X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0,$$

la trayectoria degenera en un punto. A los puntos con esta propiedad se les denomina *puntos singulares*. En adelante trataremos básicamente con puntos singulares aislados. Un punto singular $M_0(x_0, y_0)$ se llama *aislado* si se puede indicar un entorno donde él es el único punto singular.

Todo punto $M_0(x_0, 0)$ donde $y = 0$, $f(x_0, 0) = 0$, es un punto singular de la ecuación (120). Desde el punto de vista de la física, este punto singular corresponde al estado de una partícula de masa unidad con velocidad $\frac{dx}{dt}$ y aceleración $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ iguales a cero simultáneamente. Dicho de otro modo, corresponde a un estado de reposo (de equilibrio) de la partícula. Por esta razón, los puntos singulares también se conocen como *puntos de reposo* o *puntos de equilibrio*.

Puesto que los estados de equilibrio de un sistema físico caracterizan los puntos singulares de su estado, la clasificación y el estudio de tales puntos ocupan un lugar destacado en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

El problema de la clasificación y el estudio de los puntos singulares de los sistemas diferenciales tipo (122) tiene sus orígenes en la teoría de las velocidades y aceleraciones de los líquidos, y fue considerado con detalle por primera vez por el científico ruso N. E. Zhukovski en su tesis de maestría "Cinemática de los cuerpos líquidos" (1876). Los nombres de los diferentes tipos de puntos singulares fueron propuestos inicialmente por el matemático francés H. Poincaré.

www.FreeLibros.me

Tratemos de establecer qué significado físico se le puede atribuir a las trayectorias de fase y a los puntos singulares de los sistemas diferenciales tipo (122). Para una mejor comprensión, introduzcamos un campo vectorial bidimensional (fig. 51) definido por la función

$$\mathbf{V}(x, y) = X(x, y)\,\mathbf{i} + Y(x, y)\,\mathbf{j},$$

donde $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los versores (vectores unitarios) de los ejes de coordenadas cartesianas x e y, respectivamente. Este campo tiene dos componentes en todo punto $P(x, y)$: una horizontal $X(x, y)$ y una vertical $Y(x, y)$. Puesto que $\dfrac{dx}{dt} = X(x, y)$ y $\dfrac{dy}{dt} = Y(x, y)$, el vector ligado a todo punto no singular $P(x, y)$ es tangente a la trayectoria de fase en dicho punto.

Si interpretamos la variable t como el tiempo, entonces al vector $\mathbf{V}$ se le puede asignar el papel de vector de velocidad del movimiento del punto imagen a lo largo de la trayectoria. De esta manera, podemos considerar que todo el plano de fase está colmado de puntos imagen y que una trayectoria de fase es la huella que deja cierto punto imagen en movimiento. Como resultado de tal interpretación llegamos a una analogía con el movimiento plano de un líquido incompresible. Dado que el sistema (122) es autónomo, el vector $\mathbf{V}$ en cada punto fijo $P(x, y)$ no cambia con el tiempo, por lo que el movimiento del líquido es estacionario. Las trayectorias de fase son, entonces, las trayectorias de movimiento de las partículas del líquido, y los puntos singulares O, O', O'' (fig. 51) representan partículas inmóviles.

Los hechos más característicos del movimiento representado en la figura 51 son:

1) la existencia de puntos singulares;
2) la variedad de las trayectorias cerca de los puntos singulares;

www.FreeLibros.me

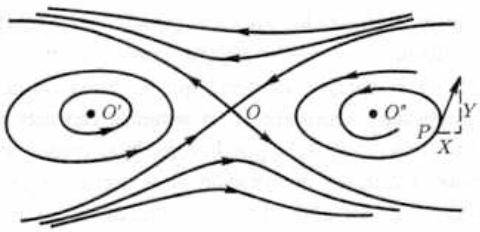

Fig. 51

3) la existencia simultánea de puntos estables e inestables;
4) la presencia de trayectorias cerradas, que en este caso corresponden a movimientos periódicos.

Las características que acabamos de enumerar constituyen la parte más importante del *retrato de fase*, que no es más que el cuadro completo del comportamiento de las trayectorias de fase del sistema general (122). Debido a que, como se indicó antes, muchas ecuaciones diferenciales no se integran mediante funciones elementales, el objetivo de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales del tipo (122) es procurar construir un retrato de fase lo más completo posible a partir de las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$.

4. Sistemas mecánicos conservativos

Es bien sabido de la práctica que en los sistemas dinámicos reales la energía se disipa. Comúnmente, la disipación de energía es ocasionada por algún tipo de rozamiento. Al mismo tiempo, en algunos casos concretos la disipación ocurre tan lentamente que la podemos despreciar si nos limitamos a considerar un intervalo de

www.FreeLibros.me

tiempo no muy prolongado. En esos casos concretos, al estudiar el sistema dinámico se puede asumir que se cumple la ley de conservación de la energía, es decir, que la suma de las energías cinética y potencial es constante. Los sistemas con esta propiedad se denominan *conservativos*. Se puede considerar conservativo, entre otros, el globo terráqueo en rotación si se toma un intervalo de tiempo de unos pocos años. Pero si estudiamos su movimiento durante varios millones de años, será necesario tener en cuenta la disipación relacionada con las mareas en los océanos y mares.

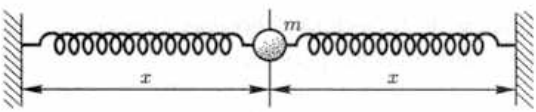

Fig. 52

Un ejemplo elemental de sistema conservativo es el sistema formado por un cuerpo de masa m que se mueve horizontalmente en el vacío bajo la acción de dos resortes (fig. 52). Denotemos con x el desplazamiento del cuerpo respecto a la posición de equilibrio y supongamos que la fuerza que los resortes ejercen sobre el cuerpo (*fuerza restauradora*) es proporcional a x. Entonces la ecuación de movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad k > 0.$$

Los resortes de este tipo se llaman *resortes lineales*, debido a que la fuerza restauradora es una función lineal de x. Si el cuerpo oscila en un medio que opone una *fuerza resistente* proporcional a la velocidad del movimiento, entonces la ecuación de movimiento del sistema conservativo es

www.FreeLibros.me

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad c > 0. \tag{124}$$

Éste es un caso de movimiento amortiguado, puesto que la fuerza resistente es una función lineal de la velocidad $\frac{dx}{dt}$.

En general, una ecuación de la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0, \tag{125}$$

donde f y g son funciones arbitrarias tales que $f(0) = 0$ y $g(0) = 0$, se puede interpretar como la ecuación de movimiento de un cuerpo de masa m sometido a la acción de una fuerza restauradora $f(x)$ y una fuerza resistente $-g\left(\frac{dx}{dt}\right)$. En general, estas fuerzas no son lineales, de manera que la ecuación (125) se puede considerar como la ecuación fundamental de la mecánica no lineal.

Estudiemos brevemente el sistema conservativo especial sin fuerza resistente descrito por la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \tag{126}$$

Como la fuerza resistente es igual a cero, podemos suponer que no hay disipación de energía. De la ecuación (126) se puede pasar al sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \tag{127}$$

www.FreeLibros.me

Excluyendo el tiempo t del sistema (127) obtenemos la ecuación de la trayectoria del sistema en el plano de fase:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my}. \tag{128}$$

Separemos las variables:

$$my\,dy = -f(x)\,dx. \tag{129}$$

Suponiendo que $y = y_0$ y $x = x_0$ para $t = t_0$, después de integrar la ecuación (127) desde t_0 hasta t obtenemos

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}my_0^2 = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2}my^2 + \int_0^x f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}my_0^2 + \int_0^{x_0} f(x)\,dx. \tag{130}$$

Como $\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ es la fórmula de la energía cinética del sistema dinámico y

$$V(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi \tag{131}$$

www.FreeLibros.me

es la energía potencial, podemos afirmar que la ecuación (130) expresa la ley de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E, \tag{132}$$

donde $E = \frac{1}{2}my_0^2 + V(x_0)$ es la energía total del sistema. La ecuación (132) es la ecuación de las trayectorias de fase del sistema (127), pues se obtuvo de integrar la ecuación diferencial (128). De esta manera, a diferentes valores de E le corresponden diferentes curvas de energía constante en el plano de fase. Los puntos singulares del sistema (127) son los puntos $M_\nu(x_\nu, 0)$, donde x_ν son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Como se estableció antes, los puntos singulares son los puntos de reposo del sistema dinámico descrito por la ecuación (126). De la ecuación (128) se deduce que las trayectorias de fase cortan perpendicularmente al eje x y horizontalmente a las rectas $x = x_\nu$. Además, la ecuación (132) muestra que las trayectorias de fase son simétricas respecto al eje x.

Escribiendo la ecuación (132) en la forma

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)}, \tag{133}$$

resulta fácil construir las trayectorias de fase. En efecto, introduzcamos en nuestro análisis el "plano de balance de energía" (x, z), cuyo eje z se encuentra en la misma vertical que el eje y del plano de fase (fig. 53). Representemos en el plano (x, z) la función $z = V(x)$ y varias rectas horizontales $z = E$ (en la figura 53 se muestra una de ellas). Indiquemos en la figura el valor de la diferencia $E - V(x)$. Seguidamente multiplicamos $E - V(x)$ por $\frac{2}{m}$, lo cual permite

www.FreeLibros.me

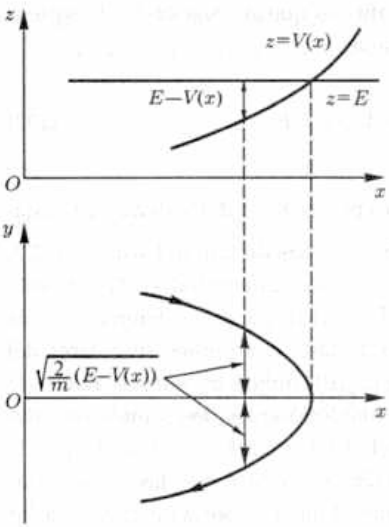

Fig. 53

calcular los valores de y a partir de la fórmula (133) y construir su gráfico en el plano de fase. Como $\frac{dx}{dt} = y$, la dirección positiva a lo largo de toda trayectoria corresponde al movimiento del punto imagen de izquierda a derecha por encima del eje x, y de derecha a izquierda por debajo.

Los razonamientos generales que acabamos de exponer permiten investigar la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \operatorname{sen} x = 0 \tag{134}$$

del movimiento de un péndulo en un medio sin resistencia, donde k es una constante positiva (véase la página 66).

La ecuación (134) es un caso particular de la ecuación (126). Por consiguiente, podemos considerar que ella describe el movimiento rectilíneo sin resistencia de una masa unidad bajo la acción de un resorte no lineal con fuerza restauradora $-k \operatorname{sen} x$. En este caso, el sistema autónomo correspondiente a la ecuación (134) es

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \operatorname{sen} x. \tag{135}$$

www.FreeLibros.me

Aquí los puntos singulares son $(0,0)$, $(\pm\pi,0)$, $(\pm 2\pi,0)$, ..., y la ecuación diferencial de las trayectorias de fase tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \operatorname{sen} x}{y}.$$

Separando variables e integrando, obtenemos la ecuación de las trayectorias de fase:

$$\frac{1}{2}y^2 + k(1 - \cos x) = E,$$

la cual es un caso particular de la ecuación (132) para $m = 1$. La energía total dada por la fórmula (131) es

$$V(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi = k(1 - \cos x).$$

Construyamos en el plano (x, z) el gráfico de la función $z = V(x)$ y varias rectas $z = E$ (en la figura 54 se presenta sólo la recta $z = E = 2k$). Calculando los valores $E - V(x)$ podemos luego esbozar el cuadro del comportamiento de las trayectorias en el plano de fase utilizando la fórmula

$$y = \pm\sqrt{2\,(E - V(x))}.$$

El retrato de fase obtenido (fig. 54) muestra que si la energía E cambia de 0 a $2k$, entonces las trayectorias de fase respectivas resultan cerradas y la ecuación (134) tiene soluciones periódicas. Por otra parte, si $E > 2k$, las trayectorias de fase correspondientes no son cerradas y la ecuación (134) no tiene soluciones periódicas.

www.FreeLibros.me

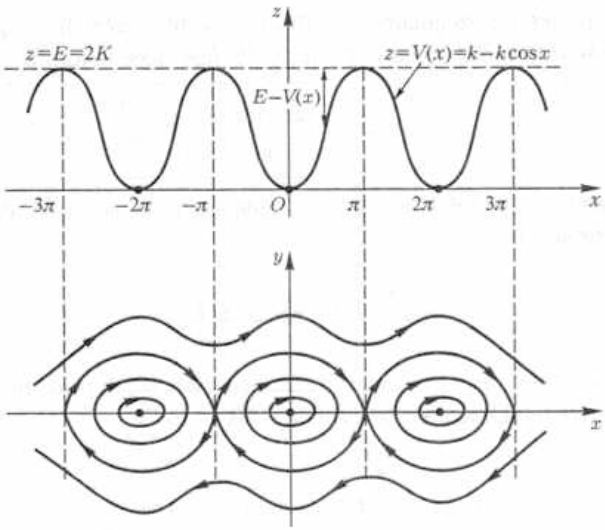

Fig. 54

Al valor $E = 2k$ en el plano de fase le corresponde una trayectoria de fase que separa dos tipos de movimiento diferentes (es una *separatriz*). Las trayectorias de fase onduladas situadas fuera de la separatriz corresponden a los movimientos de rotación del péndulo, mientras que las trayectorias cerradas que se encuentran en las regiones limitadas por las separatrices corresponden a los movimientos oscilatorios.

En la figura 54 se puede ver que en los entornos de los puntos singulares $(\pm 2\pi m, 0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, el comportamiento de las trayectorias de fase se diferencia del comportamiento de las trayectorias de fase en los entornos de los puntos $(\pm(2n-1)\pi, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$.

www.FreeLibros.me

Sobre la clasificación de los puntos singulares trataremos más adelante. Por el momento sólo diremos que los puntos $(\pm 2\pi m, 0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, de este ejemplo pertenecen al grupo de los llamados *centros*, mientras que los puntos singulares $(\pm(2n-1)\pi, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, son *puntos de silla*. Un punto singular del sistema diferencial autónomo (122) se denomina *centro* si existe algún entorno suyo densamente poblado de trayectorias de fase que lo rodean y que no se cortan la una con la otra. Se llama *punto de silla* a todo punto singular hacia el cual converge un número finito de trayectorias de fase que dividen cierto entorno del punto en regiones donde las trayectorias se comportan como una familia de hipérbolas definidas por la ecuación $xy = \text{const}$.

Veamos ahora cómo influye una resistencia lineal en el comportamiento de las trayectorias de fase de un sistema conservativo. En este caso, la ecuación diferencial del péndulo es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k \operatorname{sen} x = 0, \quad c > 0.$$

Si la resistencia es suficientemente pequeña como para permitir que el péndulo oscile respecto a la posición de equilibrio, se puede mostrar que las trayectorias de fase se comportan como en la figura 55. Si la resistencia no deja oscilar al péndulo alrededor de la posición de equilibrio, entonces las trayectorias de fase tendrán la forma que se muestra en la figura 56.

Comparando el retrato de fase de un sistema conservativo con los dos últimos retratos de fase, vemos que los puntos de silla siguen siendo puntos de silla (estamos considerando entornos suficientemente pequeños de los puntos singulares), en cambio en los entornos de los puntos $(\pm 2\pi m, 0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, las trayectorias de fase cerradas se convierten en espirales cuando la resistencia es pequeña,

www.FreeLibros.me

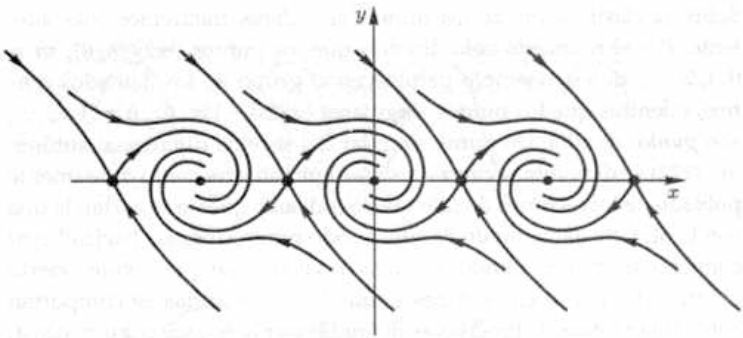

Fig. 55

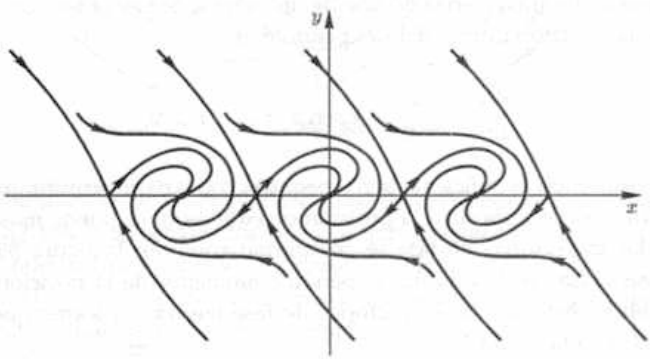

Fig. 56

y en trayectorias que "entran" en los puntos singulares siguiendo direcciones determinadas cuando la resistencia es grande. Si se trata de una espiral, llegamos a un punto singular denominado *foco*. En el otro caso el punto singular se llama *nodo*.

www.FreeLibros.me

Un punto singular (si existe) del sistema autónomo bidimensional general (122) se llama *foco* si posee un entorno densamente poblado de trayectorias de fase que no se cortan y que se asemejan a espirales que se enrollan hacia el punto singular cuando $t \to +\infty$ (o cuando $t \to -\infty$). Un punto singular se denomina *nodo* si tiene un entorno en el que toda trayectoria de fase se comporta como una parábola o una semirrecta que llega a él siguiendo una dirección determinada.

Subrayemos que ningún sistema conservativo puede tener soluciones periódicas aisladas. Más aún, si Γ es una trayectoria de fase cerrada, correspondiente a una solución periódica de un sistema conservativo, entonces cierto entorno de Γ está densamente poblado de trayectorias de fase cerradas.

Algunas de las definiciones de puntos singulares formuladas arriba tienen carácter puramente cualitativo, descriptivo. En cuanto a los criterios analíticos que establecen sus diferencias, desafortunadamente no existen para el caso general de los sistemas tipo (122), aunque sí se pueden obtener para algunas clases particulares de ecuaciones diferenciales. El ejemplo más sencillo lo constituyen los sistemas de la forma

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y, \quad \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y,$$

donde a_1, b_1, a_2 y b_2 son constantes reales.

Si la matriz de los coeficientes de este sistema es regular, es decir, si el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

www.FreeLibros.me

entonces el origen de coordenadas $O(0,0)$ del plano de fase es el único punto singular del sistema diferencial.

Supongamos que el determinante del sistema es diferente de cero, y que λ_1 y λ_2 representan los valores propios de la matriz de coeficientes. Se puede mostrar que

1) si λ_1 y λ_2 son reales y del mismo signo, entonces el punto singular es un nodo;
2) si λ_1 y λ_2 son reales y de signos diferentes, el punto singular es un punto de silla;
3) si λ_1 y λ_2 no son reales ni imaginarios puros, entonces el punto singular es un foco;
4) si λ_1 y λ_2 son imaginarios puros, el punto singular es un centro.

Los tres primeros tipos de puntos pertenecen al grupo de los denominados puntos singulares "groseros". Los puntos singulares groseros no cambian su carácter bajo perturbaciones pequeñas de los primeros miembros del sistema diferencial inicial. Los centros son puntos "no groseros": su carácter cambia incluso para perturbaciones mínimas de los segundos miembros del sistema diferencial.

5. Estabilidad de los puntos de equilibrio y de los movimientos periódicos

Como vimos, los diferentes tipos de puntos singulares se caracterizan por el hecho de que en pequeños entornos suyos las trayectorias

www.FreeLibros.me

de fase son diferentes. Pero hay una característica más: la estabilidad de un punto singular, la cual permite obtener información adicional sobre el comportamiento de las trayectorias de fase de los puntos singulares. Consideremos un péndulo como el representado en la figura 57. En el dibujo se muestran dos estados de equilibrio: a) un cuerpo de masa m se encuentra en estado de equilibrio en el punto superior; b) un cuerpo de masa m se encuentra en estado de equilibrio en el punto inferior. El primer estado es *inestable* y el segundo es *estable*. Aclaremos qué significa que el estado del cuerpo sea estable o inestable: si un cuerpo de masa m se encuentra en estado de equilibrio en el punto superior, entonces es suficiente empujarlo ligeramente para que comience a desviarse de la posición de equilibrio, alejándose de ella con velocidad creciente. Pero si el cuerpo está en estado de equilibrio en el punto inferior, después de empujarlo se moverá con velocidad decreciente, y mientras más suave sea el empujón, menor será la desviación respecto a la posición inicial.

Fig. 57

Cada estado de equilibrio de un sistema corresponde a un punto en el plano de fase. Las perturbaciones pequeñas de un punto de equilibrio inestable producen grandes desviaciones respecto al punto de equilibrio; en el caso de un punto de equilibrio estable, las perturbaciones pequeñas provocan desviaciones pequeñas. Partiendo de estas ideas intuitivas, examinemos un punto singular aislado del sistema (122), suponiendo para mayor comodidad que el punto analizado se encuentra en el origen de coordenadas $O(0, 0)$ del plano de fase. Diremos que este punto es *estable* si para todo número positivo R existe un número positivo $r \leqslant R$ tal que toda trayectoria de fase que en el instante inicial $t = t_0$ parta de un punto P situado en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, permanecerá en dicho círculo para todo

www.FreeLibros.me

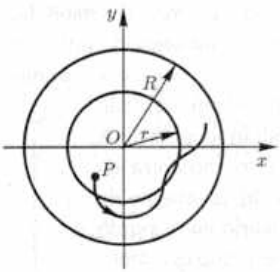

Fig. 58

$t > t_0$ (fig. 58). Sin entrar en definiciones muy formales, se puede afirmar que un punto es estable si todas las trayectorias de fase que en el instante inicial se encontraban cerca de él, continuarán estando cerca con el transcurso del tiempo. Un punto se denomina *asintóticamente estable* si es estable y existe un círculo $x^2+y^2 = r_0^2$ tal que toda trayectoria que en el instante $t = t_0$ se encuentra en dicho círculo tiende al origen de coordenadas cuando $t \to +\infty$. Un punto singular no estable se llama *inestable*.

Un centro siempre es estable (pero no asintóticamente estable). Un punto de silla siempre es inestable. En la figura 55, donde se muestra el comportamiento de las trayectorias de fase en el caso de las oscilaciones de un péndulo en un medio con poco rozamiento, los puntos singulares (focos) son asintóticamente estables; los nodos (figura 56) también son asintóticamente estables.

El concepto que acabamos de introducir de estabilidad de un punto de equilibrio es cualitativo, ya que no se menciona ninguna propiedad referente al comportamiento de las trayectorias de fase. Comparando el concepto de estabilidad asintótica con el de estabilidad, vemos que se exige adicionalmente que toda trayectoria de fase tienda al origen de coordenadas con el transcurso del tiempo. Aun así, tampoco se hace alusión a ninguna condición sobre la forma en que las trayectoria se deben acercar al punto $O(0, 0)$.

El concepto de estabilidad (y de estabilidad asintótica) juega un papel importante en las aplicaciones. De hecho, un dispositivo

www.FreeLibros.me

construido sin tener en cuenta la estabilidad, es sensible, incluso, a las influencias exteriores más pequeñas, y al final de cuentas ello puede traer consecuencias indeseables. Refiriéndose a la importancia del concepto de estabilidad, el conocido matemático y mecánico soviético N. G. Chetáev escribió [4]:

"...al construir un avión de pasajeros se debe garantizar estabilidad en su movimiento, de manera que resulte un aparato tranquilo en el vuelo y seguro en el despegue y el aterrizaje. El cigüeñal se debe calcular de modo que no se averíe a causa de las vibraciones que pueden surgir en condiciones reales de funcionamiento del motor. Con el objeto de garantizar el máximo posible de precisión en un arma de artillería, tanto el arma como las municiones se deben fabricar teniendo en cuenta la estabilidad de las trayectorias de vuelo de los proyectiles.

Podríamos seguir citando ejemplos, pero ello solamente confirmaría que al resolver un problema sobre movimientos reales, entre todas las soluciones de las ecuaciones es necesario detenerse en las que corresponden a estados estables, y que en los casos en que se desee evitar cierta solución, lo más razonable es hacer los cambios pertinentes en la construcción del sistema con el fin de que el estado de movimiento correspondiente a esa solución que queremos ignorar sea inestable."

Regresando al péndulo representado en la figura 57, destaquemos un hecho curioso y, en cierto modo, inesperado: resulta que la posición superior de equilibrio inestable del péndulo se puede volver estable mediante oscilaciones verticales del punto A de suspensión. Es más,

---

[4] *Chetáev N. G.* Estabilidad del movimiento, Moscú, 1965 (en ruso).

www.FreeLibros.me

no sólo la posición superior del péndulo, sino cualquiera otra posición (en particular, la horizontal) se puede volver estable a cuenta de las vibraciones del punto de suspensión[5].

Pasemos ahora al concepto (no menos importante que el concepto de estabilidad de un punto de equilibrio) de estabilidad de los movimientos (soluciones) periódicos. Consideremos un sistema conservativo con soluciones periódicas. A estas soluciones les corresponden trayectorias cerradas que pueblan densamente cierta región del plano de fase. A todo movimiento periódico de un sistema conservativo le corresponde un movimiento del punto imagen por una trayectoria cerrada del plano de fase.

En el caso general, el período de recorrido de los puntos imagen por diferentes trayectorias es distinto. Dicho de otra manera, el período de las oscilaciones en un sistema conservativo depende de las condiciones iniciales. Geométricamente, esto significa que dos puntos imagen cercanos que comienzan a moverse en el instante $t = t_0$, por ejemplo, desde el eje x, con el transcurso del tiempo se separan a una distancia finita. Sin embargo, puede suceder que con el tiempo estos puntos no se separen. Para diferenciar estas dos variantes se introduce el concepto de estabilidad de las soluciones periódicas según Liapunov. Se dice que la solución periódica correspondiente a la trayectoria cerrada Γ es *estable según Liapunov* si para un ε-entorno[6] tan pequeño como se quiera de un punto M que se

---

[5] En el libro de T. G. Strizhak "Métodos de investigación de los sistemas dinámicos tipo péndulo", Alma-Atá, 1981 (en ruso), se presentan muchos ejemplos de estabilización de distintas clases de péndulos.

[6] Por ε-entorno del punto M se entiende un círculo de radio ε con centro en el punto M.

www.FreeLibros.me

mueve por la trayectoria cerrada Γ (fig. 59), existe un $\delta(\varepsilon)$-entorno móvil de M tal que todo punto imagen que en el instante inicial se encuentre en el $\delta(\varepsilon)$-entorno nunca saldrá del ε-entorno. Si una solución periódica no es estable según Liapunov, se dice que es *no estable según Liapunov*.

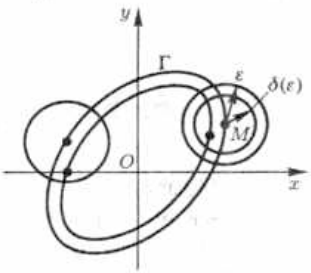

Fig. 59

Las soluciones periódicas no estables según Liapunov poseen de todas maneras cierta clase de estabilidad, llamada *estabilidad orbital*. La estabilidad orbital consiste en que, a pequeños cambios de las condiciones iniciales, el punto imagen pasa de una trayectoria de fase a otra tan cercana como se desee de la trayectoria inicial.

Un ejemplo de soluciones periódicas no estables según Liapunov son las soluciones que aparecen, por ejemplo, al examinar la ecuación diferencial del movimiento horizontal en el vacío de una masa m sometida a la acción de dos resortes lineales (fig. 52). Otro ejemplo de soluciones periódicas no estables según Liapunov, pero que poseen estabilidad orbital, son las soluciones de la ecuación diferencial (134) del movimiento de un péndulo circular en un medio sin resistencia.

En el primer caso, el período de las oscilaciones no depende de las condiciones iniciales y se calcula con la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. En el segundo caso, el período de las oscilaciones depende de las condiciones iniciales y se expresa, como sabemos, por medio de una integral elíptica de primera especie calculada desde 0 hasta $\dfrac{\pi}{2}$.

www.FreeLibros.me

Finalmente, debemos señalar que el problema de la estabilidad según Liapunov de los movimientos periódicos está directamente relacionado con el problema de las oscilaciones isócronas[7].

6. Funciones energéticas

Es fácil intuir que si la energía total de cierto sistema mecánico alcanza el mínimo en un punto de equilibrio, este último es un punto de equilibrio estable. Esta idea yace en la base de uno de los dos métodos de análisis de estabilidad propuestos por el conocido matemático y mecánico ruso A. M. Liapunov. El método se conoce comúnmente con el nombre de *método directo* o *segundo método de Liapunov*[8].

Para ilustrar el método directo de Liapunov, consideremos un sistema tipo (122) para el caso en que el origen de coordenadas es un punto singular.

Sea Γ una trayectoria de fase del sistema (122). Supongamos que cierta función $V = V(x, y)$ y sus derivadas parciales $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ son continuas en una región del plano de fase que contiene a Γ. Si el punto imagen $(x(t), y(t))$ se mueve a lo largo de la curva Γ, entonces la función $V(x, y)$ se puede ver como una función de t a lo largo

---

[7] Ver, por ejemplo, el libro de V. V. Amelkin, N. A. Lukashévich, A. P. Sadovski "Oscilaciones no lineales en sistemas de segundo orden", Minsk, 1982 (en ruso).

[8] Se pueden encontrar muchos ejemplos interesantes sobre investigación de modelos diferenciales en el libro de N. Rouche, P. Habets y M. Laloy, "Stability Theory by Lyapunov's Direct Method", Springer-Verlag, New York, 1977.

www.FreeLibros.me

de Γ; por consiguiente, la velocidad de variación de $V(x, y)$ a lo largo de Γ es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}X(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}Y(x, y), \qquad (136)$$

donde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ son los segundos miembros del sistema (122).

La fórmula (136) juega un papel fundamental en el método directo de Liapunov. Para poder aplicar en la práctica el método directo de Liapunov son importantes los siguientes conceptos.

Supongamos que $V = V(x, y)$ es continua junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial V}{\partial x}$ y $\frac{\partial V}{\partial y}$ en cierta región G que contiene el origen de coordenadas, y que $V(0, 0) = 0$. Se dice que la función $V(x, y)$ es *definida positiva* (*definida negativa*) si en todos los puntos de la región G, salvo en el origen de coordenadas, se cumple la desigualdad $V(x, y) > 0$ ($V(x, y) < 0$). Si $V(x, y) \geqslant 0$ ($V(x, y) \leqslant 0$), es decir, si la desigualdad no es estricta, se dice que $V(x, y)$ es una *función de signo positivo* (*función de signo negativo*). Por ejemplo, en el plano (x, y) la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ es definida positiva, mientras que la función $V(x, y) = x^2$ es de signo positivo, puesto que se anula en todo el eje y.

Si para una función definida positiva $V(x, y)$ se cumple que $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ en todos los puntos de $G \setminus O$, entonces la superficie $z = V(x, y)$ es una especie de paraboloide tangente al plano (x, y) en el punto $O(0, 0)$ (fig. 60). En general, la superficie $z = V(x, y)$ (para V definida positiva) puede tener una estructura más compleja. Un ejemplo de este tipo de superficie es el de la figura 61, donde la proyección sobre el plano (x, y) de la intersección

www.FreeLibros.me

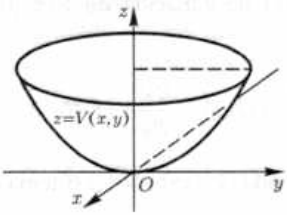

Fig. 60

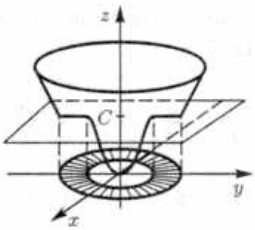

Fig. 61

de la superficie con el plano $z = C$ no es una curva, sino una arandela.

Si la función definida positiva $V(x, y)$ es tal que la función

$$W(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} X(x, y) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} Y(x, y) \qquad (137)$$

es de signo negativo, entonces $V(x, y)$ se denomina *función de Liapunov* o *función energética del sistema* (122). En virtud de la igualdad (136), la condición de que W sea de signo negativo significa que

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0$$

y, consecuentemente, la función V no crece a lo largo de la trayectoria Γ cerca del origen de coordenadas.

Enunciemos uno de los resultados obtenidos por A. M. Liapunov: *si para el sistema* (122) *existe una función energética* $V(x, y)$, *entonces el origen de coordenadas, el cual es un punto singular, es estable. Si la función definida positiva es tal que la función* W *dada por la igualdad* (137) *es definida negativa, entonces el origen de coordenadas es asintóticamente estable.*

www.FreeLibros.me

Mostremos con un ejemplo cómo aplicar este resultado en la práctica. Examinemos la ecuación de movimiento de un cuerpo de masa unidad sometido a la acción de dos resortes. En virtud de (124), dicha ecuación tiene la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad c > 0. \tag{138}$$

Recordemos que el coeficiente $c > 0$ caracteriza la resistencia del medio y la constante $k > 0$, las propiedades de los resortes. El sistema autónomo correspondiente a la ecuación (138) es

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -kx - cy. \tag{139}$$

El origen de coordenadas del plano de fase (x, y) es el único punto singular de este sistema. La energía cinética del cuerpo es igual a $\frac{y^2}{2}$, mientras que la energía potencial (energía acumulada por el resorte) está dada por la igualdad

$$\int_0^x k\xi \, d\xi = \frac{1}{2}kx^2.$$

Consiguientemente, la energía total del sistema es

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{140}$$

www.FreeLibros.me

La función V determinada por medio de la fórmula (140) es una función definida positiva. Y como

$$\frac{\partial V}{\partial x}X(x,y)+\frac{\partial V}{\partial y}Y(x,y)=kxy+y(-kx-cy)=-cy^2\leqslant 0,$$

entonces $V(x,y)$ es una función energética del sistema (139), implicando que el punto singular $O(0,0)$ es estable.

Dado que el criterio de Liapunov que acabamos de enunciar posee un carácter puramente cualitativo, no todas las veces se logra obtener el resultado tan rápidamente como en este ejemplo. Partiendo del criterio de Liapunov no siempre se puede construir una función energética, aun sabiendo que existe. Este hecho dificulta notablemente el proceso de determinación de la estabilidad en cada caso concreto.

Debemos tener presente que el criterio de Liapunov se debe observar como un principio de obtención de criterios de estabilidad. En la actualidad existe una serie de resultados interesantes[9] entre el gran número de investigaciones dedicadas a este tema.

7. Estados simples de equilibrio

Desde la propia interpretación dinámica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden ya es claro que el estudio de los estados de

[9] Ver, por ejemplo, el libro de E. A. Barbashin "Funciones de Liapunov", Moscú, 1970 (en ruso).

www.FreeLibros.me

equilibrio o, lo que es lo mismo, de los puntos singulares, proporciona la clave para la comprensión del comportamiento de las curvas integrales.

También está claro que, como no es posible integrar en funciones elementales todas las ecuaciones diferenciales, necesitamos criterios que nos den la posibilidad de clasificar los puntos singulares a partir de la forma de la ecuación diferencial. A pesar de que casi siempre la resolución de este problema es muy difícil, siempre se pueden hallar clases de ecuaciones diferenciales para las que el problema se resuelve fácilmente. Más adelante analizaremos el problema del movimiento de un cuerpo de masa unidad sometido a la acción de dos resortes en un medio con resistencia, y mostraremos cómo utilizar algunos resultados de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Pero ahora nos detendremos a analizar los sistemas tipo (122). Resulta que al clasificar los puntos singulares de los sistemas de este tipo, el caso más sencillo se presenta cuando el determinante de Jacobi (*jacobiano*)

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero en el punto analizado.

Si (x^*, y^*) es un punto singular del sistema (122) y $J^* = J(x^*, y^*) \neq 0$, entonces el tipo de este punto singular, llamado *punto singular simple*, depende básicamente del signo de J^*. A saber, si $J^* < 0$, el punto singular (x^*, y^*) es un punto de silla. Si $J^* > 0$, el punto singular puede ser un centro, un nodo o un foco. Es un centro solamente si

www.FreeLibros.me

en él la *divergencia*

$$D(x, y) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

se anula ($D^* = D(x^*, y^*) = 0$). Sin embargo, se debe señalar que la condición $D^* = 0$ no es, en general, suficiente para que el punto singular (x^*, y^*) sea un centro. Para que haya un centro se deben cumplir ciertas condiciones adicionales en las que participan las derivadas parciales de órdenes superiores; y el número de estas condiciones pueden ser infinito. Al mismo tiempo, si las funciones X e Y son lineales respecto a las variables x e y, la condición $D^* = 0$ se vuelve suficiente para que el punto singular (x^*, y^*) sea un centro.

Si $J^* > 0$, pero el punto singular (x^*, y^*) no es un centro, entonces existe un entorno suficientemente pequeño de (x^*, y^*) densamente poblado de trayectorias que tienden al punto singular siguiendo bien espirales, bien una dirección determinada. En este caso, si $D^* > 0$, el punto singular se alcanza cuando $t \to -\infty$ y es inestable. Si $D^* < 0$, el punto singular se alcanza cuando $t \to +\infty$ y es estable. Si las trayectorias de fase que alcanzan el punto singular son espirales, dicho punto es un foco. Si todas las líneas integrales entran al punto singular con una pendiente determinada, entonces el punto es un nodo (fig. 62).

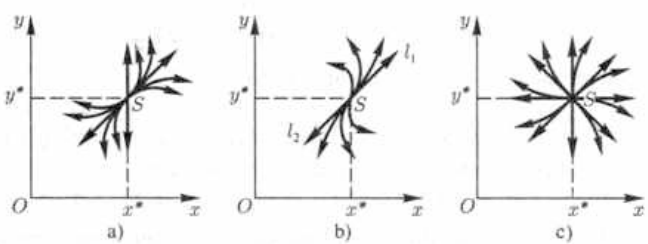

Fig. 62

www.FreeLibros.me

Independientemente del signo del jacobiano J^*, las tangentes a las trayectorias del sistema diferencial (122) en el punto singular (x^*, y^*) se hallan a partir de la *ecuación característica*

$$\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}} = \frac{\dfrac{\partial Y(x^*, y^*)}{\partial x}\widetilde{x} + \dfrac{\partial Y(x^*, y^*)}{\partial y}\widetilde{y}}{\dfrac{\partial X(x^*, y^*)}{\partial x}\widetilde{x} + \dfrac{\partial X(x^*, y^*)}{\partial y}\widetilde{y}}, \tag{141}$$

donde

$$\widetilde{x} = x - x^*, \quad \widetilde{y} = y - y^*. \tag{142}$$

Si X e Y contienen términos lineales, entonces las derivadas parciales en la ecuación (141) son los coeficientes de x e y en el sistema que se obtiene del sistema (122) después de hacer los cambios de variables (142).

La ecuación (141) es homogénea. Por tanto, haciendo el cambio de variable $\lambda = \dfrac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}}$, donde λ es la pendiente de las llamadas *direcciones excepcionales*, obtenemos la ecuación cuadrática

$$X_y^*\lambda^2 + \left(X_x^* - Y_y^*\right)\lambda - Y_x^* = 0 \tag{143}$$

respecto a λ. El discriminante de la ecuación (143) es

$$\Delta = \left(X_x^* + Y_y^*\right)^2 - 4J^* = D^{*2} - 4J^*.$$

Si $J^* < 0$ (o sea, el punto singular es un punto de silla), entonces la ecuación (143) siempre produce dos direcciones excepcionales reales.

www.FreeLibros.me

Si $J^* > 0$, entonces bien no hay direcciones excepcionales reales, bien hay dos direcciones excepcionales reales o una dirección excepcional real múltiple. En el primero de los casos indicados el punto singular es un centro o un foco.

La existencia de direcciones excepcionales reales implica (si $J^* > 0$) la existencia de un nodo. En particular, si existen dos direcciones excepcionales reales, se puede demostrar que existen exactamente dos trayectorias (una por cada lado) tangentes en el punto singular a una de las rectas excepcionales, mientras que las demás trayectorias entran al punto singular tangencialmente a la otra recta excepcional (fig. 62 a).

Si $\Delta = 0$ y la ecuación (143) no es una identidad, entonces tenemos una sola recta excepcional (el gráfico del comportamiento de las trayectorias se ilustra en la figura 62 b). Este caso se obtiene del anterior cuando dos direcciones excepcionales coinciden. El punto singular divide la recta excepcional en dos semirrectas l_1 y l_2. El entorno del punto singular se divide en dos sectores, uno densamente poblado de trayectorias que "entran" en el punto singular tangencialmente a la recta l_1, y otro densamente poblado de trayectorias que "entran" en el punto singular tangencialmente a la recta l_2. La frontera entre los dos sectores está compuesta por dos trayectorias, una de las cuales es tangente a la semirrecta l_1 en el punto singular, y la otra, a la semirrecta l_2.

Si en la ecuación (143) todos los coeficientes se anulan, obtenemos una identidad, y todas las rectas que pasan por el punto singular son excepcionales. En este caso, existen exactamente dos trayectorias (una a cada lado) tangentes a cada una de estas rectas en el punto singular. Este punto singular (fig. 62 c) es semejante a un punto con una recta excepcional real doble.

www.FreeLibros.me

8. Movimiento en un medio con rozamiento lineal

Anteriormente se demostró que la ecuación diferencial del movimiento de un cuerpo de masa unidad sometido a la acción de resortes lineales en un medio con rozamiento lineal tiene la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{144}$$

Con el objeto de investigar exhaustivamente el modelo diferencial (144), fijemos una dirección de acción de las fuerzas $c\frac{dx}{dt}$ y kx. Antes también se indicó que a la ecuación (144) se le puede poner en correspondencia el sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -kx - cy. \tag{145}$$

Si excluimos el caso trivial $k = 0$, obtenemos que el origen de coordenadas es un punto singular del sistema diferencial (145). El sistema (145) es un caso particular del sistema general (122) para

$$X(x, y) = y, \quad Y(x, y) = -kx - cy.$$

Escribamos el jacobiano, la divergencia y la ecuación característica del sistema (145):

$$J(x, y) = k, \quad D(x, y) = -c,$$
$$\lambda^2 + c\lambda + k = 0.$$

www.FreeLibros.me

El discriminante de la ecuación característica es

$$\Delta = c^2 - 4k.$$

En correspondencia con los resultados de las páginas 160–164 se pueden presentar los casos siguientes:

1. Si $k < 0$, entonces el punto singular es un punto de silla con dos direcciones excepcionales, una positiva y una negativa. El comportamiento de las trayectorias de fase se ilustra en la figura 63. Como se puede observar, es posible diferenciar tres tipos de movimiento. Cuando las condiciones iniciales corresponden al punto a (en este punto el vector de velocidad está dirigido hacia el origen de coordenadas y la velocidad es suficientemente grande), el punto imagen se mueve con velocidad decreciente por una trayectoria dirigida hacia el punto singular y, después de pasar cerca del origen de coordenadas, se aleja con velocidad creciente. Si la velocidad inicial decrece hasta el valor crítico correspondiente al punto b, entonces el punto imagen se acerca al punto singular con velocidad decreciente y "alcanza" el origen de coordenadas al cabo de un tiempo infinito. Finalmente, si la velocidad inicial es menor que el valor crítico y corresponde, digamos, al punto c, entonces el punto imagen se mueve hacia el origen de coordenadas con una velocidad decreciente que se anula a una distancia x_1 del punto singular. En el punto $(x_1, 0)$ el vector velocidad cambia de dirección y el punto imagen se aleja con velocidad creciente del origen de coordenadas.

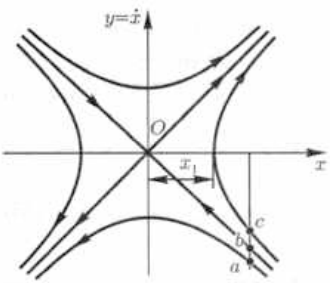

Fig. 63

www.FreeLibros.me

Si el punto imagen correspondiente al estado inicial del sistema dinámico se encuentra en uno de los tres cuadrantes restantes, la interpretación del movimiento es evidente.

2. Si $k > 0$, entonces $J^* > 0$ y el valor del coeficiente c determina el tipo del punto singular.

Veamos todas las posibles variantes.

$2a$) Si $c = 0$, es decir, si no hay rozamiento, el punto singular es un centro (fig. 64). Los movimientos son periódicos y su amplitud depende de las condiciones iniciales.

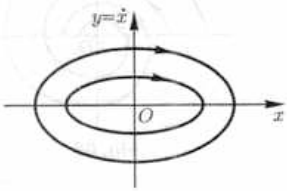

Fig. 64

$2b$) Si $c > 0$, es decir, si el amortiguamiento es positivo, entonces la divergencia $D = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y}$ es negativa y, naturalmente, el punto imagen se mueve por trayectorias dirigidas hacia el origen de coordenadas, adonde llegará al cabo de un tiempo infinito.

Seamos más precisos:

$2b_1$) Si $\Delta < 0$, es decir, si $c^2 < 4k$, entonces el punto singular es un foco (fig. 65), lo que significa que el sistema dinámico realiza oscilaciones amortiguadas con amplitud decreciente respecto al estado de equilibrio.

$2b_2$) Si $\Delta = 0$, es decir, si $c^2 = 4k$, entonces el punto singular es un nodo con una dirección excepcional de pendiente negativa (fig. 66). El movimiento es aperiódico y corresponde a un *amortiguamiento crítico*.

$2b_3$) Si $\Delta > 0$, es decir, si $c^2 > 4k$, entonces el punto singular es un nodo con dos direcciones excepcionales de pendientes negativas

www.FreeLibros.me

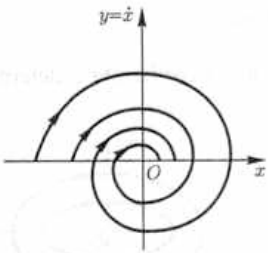

Fig. 65

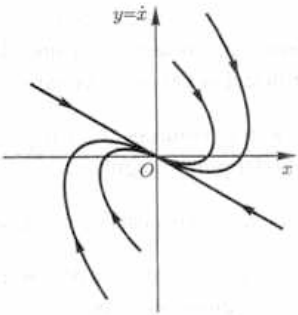

Fig. 66

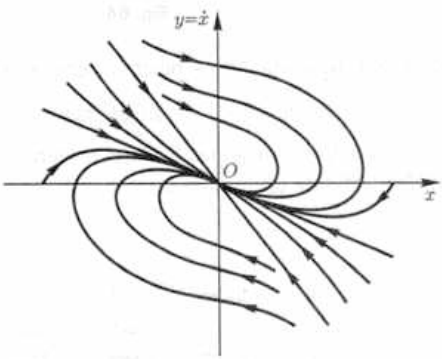

Fig. 67

(fig. 67). Cualitativamente, el movimiento del sistema dinámico es el mismo que en el caso anterior y corresponde a un amortiguamiento de las oscilaciones.

De los resultados obtenidos se infiere que para $c > 0$ y $k > 0$ (el rozamiento es positivo y la fuerza restauradora es de atracción), el sistema dinámico tiende al estado de equilibrio y el movimiento es estable.

2*c*) Si $c < 0$, es decir, en caso de amortiguamiento negativo, el esquema cualitativo del comportamiento de las trayectorias de fase

www.FreeLibros.me

es semejante al esquema del caso 2*b*), con la única diferencia de que aquí el sistema dinámico deja de ser estable.

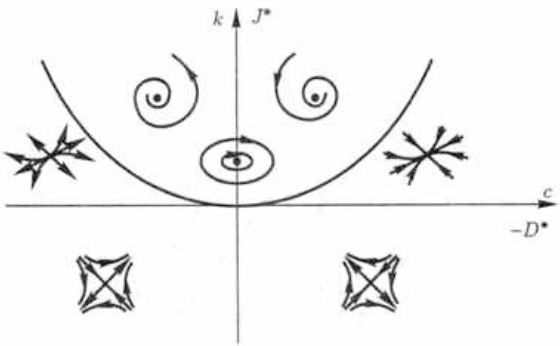

Fig. 68

El diagrama en la figura 68 reúne los resultados obtenidos y muestra cómo se clasifican los puntos singulares en función de los parámetros c y k. Este diagrama se puede utilizar como un resumen de los resultados de la investigación sobre la clasificación de los puntos singulares del sistema (122), cuando el jacobiano $J^* \neq 0$ para $c = -D^*$ y $k = J^*$. Sin embargo, en el caso general, la igualdad $c = 0$ no implica que el sistema (122) tiene un centro, y de la igualdad $k = 0$ no se puede concluir que el sistema no tiene un punto singular. Estos casos corresponden a los puntos singulares compuestos, los cuales se examinan más adelante.

Volviendo al sistema dinámico analizado en esta sección, subrayemos que si $k = 0$ ($c \neq 0$), el sistema autónomo (145) correspondiente a la ecuación (144) adopta la forma

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -cy.$$

www.FreeLibros.me

De aquí se deduce que la recta $y = 0$ está densamente poblada de puntos singulares. El comportamiento de las trayectorias de fase se muestra en la figura 69.

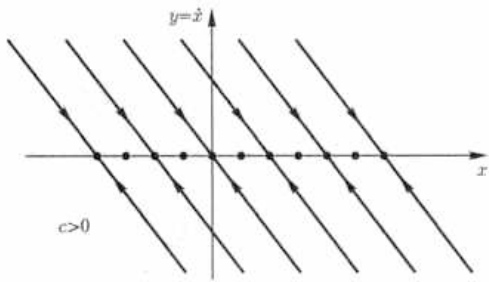

Fig. 69

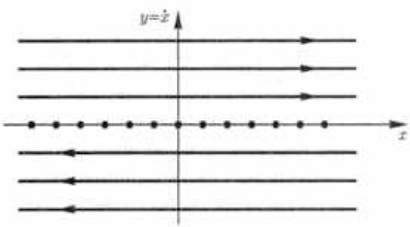

Fig. 70

Finalmente, si $k = c = 0$, la ecuación (144) se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

y su sistema correspondiente es

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Igual que en el caso anterior, el eje x está densamente poblado de puntos singulares. El esquema del comportamiento de las trayectorias de fase se muestra en la figura 70.

www.FreeLibros.me

9. Flujo adiabático en una tobera

El estudio de los flujos de sustancias viscosas compresibles tiene una gran importancia práctica. En particular, los flujos de este tipo se originan alrededor de las alas y fuselajes de los aviones; con estos flujos está relacionado el funcionamiento de las turbinas de gas y vapor, de los motores de propulsión a chorro y de los reactores nucleares.

Analicemos el flujo de un gas ideal de calor específico c_p que pasa por una tobera de sección variable A (fig. 71). Vamos a suponer que el flujo es unidimensional, es decir, que todas sus propiedades son uniformes en una misma sección de la tobera. La fricción en la capa fronteriza está condicionada por la tensión tangencial

$$\tau = q\rho\frac{v^2}{2}, \qquad (146)$$

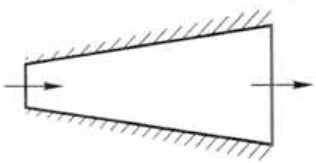

Fig. 71

donde q es el coeficiente de rozamiento, el cual depende básicamente del número de Reynolds, pero se supone constante a lo largo de la tobera; p es la densidad de masa del flujo; y v, la velocidad del flujo. Por último, asumiremos que el flujo es adiabático, o sea, que no hay resistencia interna al movimiento, no hay combustión, cambios químicos, evaporación o condensación, etcétera.

Una de las ecuaciones fundamentales del flujo es la *ecuación de continuidad*, que en este caso tiene la forma

$$w = \rho A v, \qquad (147)$$

donde la velocidad w de variación de la masa del flujo es constante.

www.FreeLibros.me

De la igualdad (147) se deduce que

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0. \tag{148}$$

Antes de escribir la ecuación de la energía total del flujo estacionario, subrayemos que en el caso general esta ecuación relaciona la acción del trabajo exterior y las influencias térmicas exteriores con el aumento de la entalpía y de las energías cinética y potencial del flujo. En el caso considerado el flujo es adiabático, por lo que la ecuación de energía es

$$0 = w(h + dh) - wh + w\left(\frac{v^2}{2} + d\left(\frac{v^2}{2}\right)\right) - w\frac{v^2}{2},$$

o bien

$$dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \tag{149}$$

donde h es la entalpía del flujo (potencial termodinámico) a la temperatura absoluta T. Como $dh = c_p\, dT$, la ecuación (149) de energía del flujo toma la forma

$$c_p\, dT + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \tag{150}$$

Ocupémonos ahora de la obtención de la ecuación (de cantidad) de movimiento del fluido. En los problemas relacionados con flujos estacionarios, usualmente se emplea la segunda ley de Newton.

www.FreeLibros.me

Suponiendo que el ángulo de divergencia de las paredes de la tobera es pequeño, la ecuación de movimiento se puede escribir así:

$$pA + p\,dA - (p + dp)(A + dA) - \tau\,dA = w\,dv,$$

o bien

$$-A\,dp - dA\,dp - \tau\,dA = w\,dv, \tag{151}$$

donde p es la presión estática.

Como el término $dAdp$ es el infinitésimo de mayor orden en la ecuación (151), siempre se puede suponer que la ecuación de movimiento es

$$-A\,dp - \tau\,dA = w\,dv. \tag{152}$$

La variación del *diámetro hidráulico* D a lo largo del eje de la tobera está dado por la función $D = F(x)$, donde x es la coordenada en el eje de la tobera. De la definición de diámetro hidráulico se deduce que

$$\frac{dA}{A} = \frac{4\,dx}{D}. \tag{153}$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{\rho v^2}{2} = \gamma p \mathrm{M}^2$, donde γ es el coeficiente de conducción calorífica, y M es el número de Mach, la fórmula (146) se puede escribir en la forma

$$\tau = q\gamma p \mathrm{M}^2. \tag{154}$$

www.FreeLibros.me

Tomando en consideración las igualdades (147), (153) y (154), a partir de (152) resulta la siguiente ecuación de movimiento del flujo:

$$\frac{dp}{p} + \gamma \mathbf{M}^2 \left(4q \frac{dx}{D} + \frac{dv^2}{v^2} \right) = 0. \tag{155}$$

Denotando con y el cuadrado del número de Mach, en virtud de las ecuaciones (148), (150) y (155), y tras una serie de transformaciones algebraicas, llegamos [10] a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} y \right) \left(\gamma q y - F'(x) \right)}{(1 - y) F(x)} \tag{156}$$

(el apóstrofo indica la derivada respecto a x).

El denominador del segundo miembro de la ecuación (156) se anula en $y = 1$, es decir, cuando el número de Mach $\mathbf{M} = 1$. Esto quiere decir que las curvas integrales de la última ecuación cortan la llamada *línea de sonido* con tangentes verticales. Por cuanto el segundo miembro de la ecuación (156) cambia de signo al pasar la línea de sonido, las líneas integrales "dan la vuelta", evitando así los puntos de inflexión. Del sentido físico del fenómeno se deduce que el valor de x debe crecer continuamente a lo largo de las líneas integrales. Consiguientemente, la sección donde las líneas integrales cortan la línea de sonido con tangentes verticales debe ser la sección de salida de la tobera. Así pues, el paso de un flujo subsónico a uno supersónico, y viceversa,

---

[10] *Kestin J., Zaremba S. K.* One-dimensional high-speed flows. Flow patterns derived for the flow of gases through nozzles, including compressibility and viscosity effects // Aircraft Engin. 1953. V. 25, № 292. P. 172–475, 179.

www.FreeLibros.me

puede ocurrir en el interior de la tobera únicamente a través de un punto singular con direcciones excepcionales reales, es decir, a través de un punto de silla o de un nodo.

Las coordenadas de los puntos singulares de la ecuación (156) se determinan a partir de las igualdades

$$y^* = 1, \quad F'(x^*) = \gamma q,$$

las cuales indican que los puntos singulares están dispuestos en la parte de la tobera que se ensancha. Un punto de silla aparece cuando $J^* < 0$, es decir, cuando $F''(x^*) > 0$. En vista de que q es una constante suficientemente pequeña, cerca del cuello de la tobera aparece un punto de silla. Un nodo aparece sólo cuando se cumple la condición $F''(x^*) < 0$. De tal manera, un nodo se forma en la parte de la tobera que se encuentra después de un punto de inflexión del perfil o, en la práctica, a cierta distancia del cuello de la tobera, bajo la condición de que el perfil tiene un punto de inflexión.

De la ecuación característica

$$F(x^*)\lambda^2 + 2q\gamma(\gamma + 1)\lambda - 2(\gamma + 1)F''(x^*) = 0$$

se puede ver que las dos direcciones excepcionales tienen pendientes con signos contrarios en el caso de un punto de silla, y con un mismo signo (negativo) en el caso de un nodo. Esto significa que los puntos de silla son los únicos que permiten el paso tanto de velocidades subsónicas a supersónicas como de supersónicas a subsónicas (fig. 72). En un nodo es posible solamente el paso continuo de un flujo supersónico a uno subsónico (fig. 73).

www.FreeLibros.me

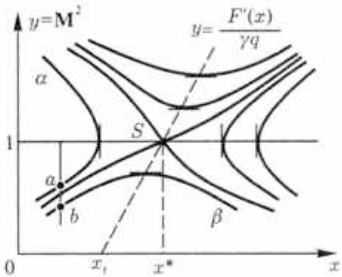

Fig. 72

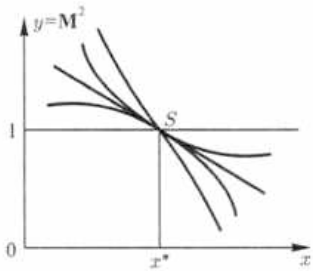

Fig. 73

Ahora bien, como la ecuación (156) no se puede integrar en forma cerrada, para las investigaciones posteriores se hace necesario emplear métodos de integración numérica. En relación con esto, destaquemos que lo mejor es comenzar la construcción de las cuatro separatrices del punto de silla como líneas integrales suponiendo que ellas parten del punto singular. Y esta construcción se puede realizar puesto que a partir de la ecuación característica podemos averiguar la dirección de las dos tangentes en el punto singular $S(x^*, 1)$. Si no tomamos en consideración esta observación y comenzamos a seguir el movimiento tomando como puntos iniciales, por ejemplo, los puntos a y b de la figura 72 (situados a lados diferentes de la separatriz), entonces veremos que los puntos correspondientes se moverán a lo largo de las curvas α y β, las cuales divergen fuertemente y, por tanto, no proporcionan ninguna información sobre la línea integral que "entra" en el punto singular S. En cambio, si nos movemos por la línea integral "partiendo" del punto S y tomando como segmento inicial de la línea integral un segmento de la recta excepcional, entonces el error se puede minimizar si se tiene en cuenta la convergencia de las líneas integrales en la dirección de decrecimiento de la variable x.

www.FreeLibros.me

En la figura 72 se muestra la disposición de las líneas integrales en un entorno del punto singular. La línea que pasa por el punto x_t del cuello de la tobera corresponde a los valores donde el numerador del segundo miembro de la ecuación (156) se anula, mostrando la existencia de puntos de extremo.

10. Puntos de equilibrio de orden superior

En las secciones precedentes hemos estudiado los tipos de puntos singulares que se presentan cuando el jacobiano es diferente de cero ($J^* \neq 0$). Pero cuando, por ejemplo, todas las derivadas parciales hasta de orden n inclusive de las funciones X e Y que aparecen en los segundos miembros del sistema (122) se anulan, en un entorno de un punto singular son posibles infinitos esquemas de comportamiento de las trayectorias de fase. Al mismo tiempo, si excluimos del análisis los puntos de equilibrio tipos centro y foco, entonces resulta que el entorno del punto singular se puede dividir en un número finito de sectores pertenecientes a los tres tipos estándar: hiperbólicos, parabólicos y elípticos. Antes de estudiar con mayor detalle estos sectores, haremos una serie de suposiciones que simplificarán la investigación posterior.

Ante todo, vamos a considerar que el origen de coordenadas ha sido trasladado al punto singular, o sea, $x^* = y^* = 0$; los segundos miembros del sistema (122) se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} X(x, y) &= X_n(x, y) + \Phi(x, y), \\ Y(x, y) &= Y_n(x, y) + \Psi(x, y), \end{aligned} \tag{157}$$

www.FreeLibros.me

donde X_n e Y_n son polinomios homogéneos de grado n respecto a las variables x e y (uno de estos polinomios puede ser idéntico a cero); y en un entorno del origen de coordenadas las funciones Φ y Ψ poseen derivadas parciales continuas de primer orden. Supondremos, además, que en ese mismo entorno del origen de coordenadas las funciones

$$\frac{\Phi(x,y)}{(x^2+y^2)^{(n+1)/2}}, \quad \frac{\Phi_x(x,y)}{(x^2+y^2)^{n/2}}, \quad \frac{\Phi_y(x,y)}{(x^2+y^2)^{n/2}},$$
$$\frac{\Psi(x,y)}{(x^2+y^2)^{(n+1)/2}}, \quad \frac{\Psi_x(x,y)}{(x^2+y^2)^{n/2}}, \quad \frac{\Psi_y(x,y)}{(x^2+y^2)^{n/2}}$$

están acotadas.

Bajo estas condiciones son válidas las siguientes afirmaciones:

1. Para el sistema de ecuaciones (122) con segundos miembros de la forma (157), toda trayectoria que "entre" en el origen de coordenadas con tangente definida es tangente a una de las rectas excepcionales

$$xY_n(x,y) - yX_n(x,y) = 0. \tag{158}$$

Dado que las funciones X_n e Y_n son homogéneas, la ecuación (158) se puede escribir como una ecuación respecto a la pendiente $\lambda = \dfrac{y}{x}$. En este caso la recta excepcional se llama *singular* si se cumplen las igualdades

$$X_n(x,y) = Y_n(x,y) = 0.$$

Las rectas de la figura 62 son ejemplos de este tipo de recta. Las rectas (158) no singulares se denominan *regulares*.

www.FreeLibros.me

2. Para investigar el comportamiento de las trayectorias de fase del sistema (122) en un entorno de uno de los dos haces que "parten" del origen de coordenadas y forman la recta excepcional, basta considerar un círculo suficientemente pequeño (con centro en el origen de coordenadas) en el que se elige un sector acotado por dos radios situados suficientemente cerca a ambos lados de la semirrecta. Este sector se conoce comúnmente con el nombre de *dominio normal de Frommer*. Seamos más precisos: en el caso de una recta excepcional regular, correspondiente a un factor lineal en la ecuación (158), el dominio normal visto en un círculo de radio suficientemente pequeño puede ser *atrayente* (*dominio normal de primer tipo*) o *repelente* (*dominio normal de segundo tipo*).

2*a*) Un dominio normal de primer tipo se caracteriza por el hecho de que toda trayectoria que pase por él alcanza el origen de coordenadas en la dirección de la tangente que coincide con la recta excepcional (fig. 74).

Fig. 74

Fig. 75

2*b*) Un dominio normal de segundo tipo se caracteriza por el hecho de que sólo una de las trayectorias de fase que pasa por él alcanza el punto singular en la dirección de la tangente que coincide con la recta excepcional. Las demás trayectorias de fase del sistema (122) que entran en el dominio normal a través de la frontera del círculo lo abandonan atravesando uno de los radios que lo acotan (fig. 75).

www.FreeLibros.me

Prestemos atención al siguiente hecho. Si el círculo con centro en el origen de coordenadas es suficientemente pequeño, entonces los dos tipos de dominios normales considerados se pueden clasificar según el comportamiento del vector (X, Y) en la frontera del dominio. Además, el comportamiento del vector (X, Y) se puede identificar con el del vector (X_n, Y_n). Incluso se puede mostrar que si, como se ha supuesto, la dirección excepcional dada no corresponde a una raíz múltiple de la ecuación característica, entonces el vector visto en uno de los radios que limitan el dominio normal está dirigido bien hacia el interior, bien hacia el exterior del dominio. Si en el primer caso el vector, visto en el arco de circunferencia de la frontera, está dirigido hacia el interior, y en el segundo caso está dirigido hacia el exterior, entonces el dominio normal es de primer tipo. Si tiene lugar la situación contraria, el dominio normal es de segundo tipo. En cualquier caso, el vector, visto en el arco de circunferencia de la frontera, siempre está dirigido bien hacia el interior bien hacia el exterior del dominio, puesto que es casi paralelo al radio.

Los dominios normales correspondientes a direcciones excepcionales singulares o a raíces múltiples de la ecuación característica, son de naturaleza más compleja, y en vista de que casi nunca se presentan, no los consideraremos en el presente trabajo.

Un punto de silla admite cuatro dominios normales de primer tipo. En un entorno de un nodo hay dos dominios normales de primer tipo y dos de segundo tipo.

3. Si existen rectas excepcionales reales, entonces el entorno del punto singular se puede dividir en un número finito de sectores, cada uno limitado por dos trayectorias de fase del sistema (122) que entran en el origen de coordenadas con tangente definida. Cada uno de estos sectores pertenece a uno de los tres tipos siguientes:

www.FreeLibros.me

3*a*) Un sector elíptico que contiene infinitas trayectorias de fase con forma de bucle, las cuales pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a los lados de la frontera del sector (fig. 76).

Fig. 76

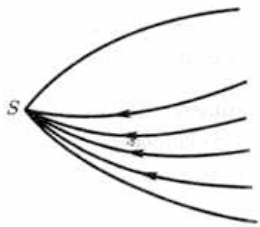

Fig. 77

3*b*) Un sector parabólico densamente poblado de trayectorias de fase que unen el punto singular con la frontera del entorno (fig. 77).

3*c*) Un sector hiperbólico densamente poblado de trayectorias que se acercan a la frontera en ambas direcciones (fig. 78).

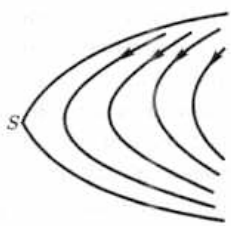

Fig. 78

Hablemos con más precisión:

4*a*) Los sectores elípticos se forman entre dos trayectorias pertenecientes a dos dominios normales consecutivos de primer tipo.

4*b*) Los sectores parabólicos se forman entre dos curvas de fase pertenecientes a dos dominios normales consecutivos, uno de primer tipo y otro de segundo tipo. Todas las curvas de fase que pasan por este sector son tangentes en el punto singular a la recta excepcional que define el dominio de primer tipo.

www.FreeLibros.me

4*c*) Los sectores hiperbólicos se forman entre dos trayectorias pertenecientes a dos dominios normales consecutivos de segundo tipo.

Se pueden distinguir cuatro sectores hiperbólicos en un punto de silla y cuatro sectores parabólicos en un nodo. Los sectores elípticos no aparecen en el caso de los puntos singulares simples, cuando el jacobiano es diferente de cero ($J^* \neq 0$).

En un entorno de un punto singular que no permite la existencia de direcciones excepcionales reales, las curvas de fase tienen obligatoriamente estructura de centro o de foco[11].

11. Inversión y coordenadas homogéneas

En las secciones anteriores expusimos algunos métodos para determinar el comportamiento local de las trayectorias de fase de los sistemas diferenciales tipo (122) en un entorno de un punto singular. Aunque en muchos casos toda la información necesaria se puede obtener de esta manera, es posible que tengamos que examinar el comportamiento de las trayectorias en sitios del plano de fase infinitamente alejados, cuando $x^2 + y^2 \to \infty$. El método más simple de estudio del comportamiento asintótico de las trayectorias del sistema (122) consiste en transformar el sistema inicial, por ejemplo, mediante la *inversión*

[11] Los métodos para diferenciar un centro de un foco se pueden ver, por ejemplo, en el libro de V. V. Amelkin, N. A. Lukashévich y A. P. Sadovski "Oscilaciones no lineales en sistemas de segundo orden", Minsk, 1982 (en ruso).

www.FreeLibros.me

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$
$$\left(\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}\right), \tag{159}$$

la cual permite analizar el punto en el infinito. La transformación (159) transforma el origen de coordenadas en el punto del infinito, y viceversa. Cualquier punto finito $M(x, y)$ del plano de fase se transforma mediante (159) en un punto $M'(\xi, \eta)$ del mismo plano, verificándose que M y M' están en una misma semirrecta que parte del origen de coordenadas, de manera que $OM \cdot OM' = r^2$ (fig. 79). Como se sabe, dichas inversiones transforman las circunferencias en circunferencias (las líneas rectas son circunferencias que pasan por el punto del infinito). En particular, las líneas rectas que pasan por el origen de coordenadas son invariantes respecto a la transformación (159). Por esto, las pendientes de las direcciones asintóticas son las pendientes de las tangentes en el nuevo origen de coordenadas $\xi = \eta = 0$. En la gran mayoría de los casos el nuevo origen de coordenadas es un punto singular. Las causas de este hecho serán examinadas posteriormente.

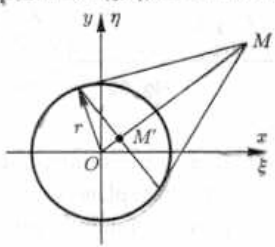

Fig. 79

En lo referente a la construcción en el plano inicial (x, y) de una curva que posea una dirección asintótica determinada, es decir, una tangente definida en el origen de coordenadas en el nuevo plano (ξ, η), se debe comenzar por su construcción en el plano (ξ, η), digamos, en un círculo unidad de (ξ, η). De hecho, dado que (159) transforma todo círculo unidad en sí mismo, entonces siempre se puede hallar

www.FreeLibros.me

un punto de intersección de la curva con la circunferencia unidad en el plano (x, y); el análisis posterior se realiza de la manera usual.

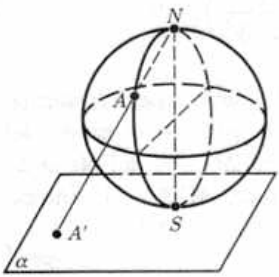

Fig. 80

Nótese que el completamiento del plano (x, y) con el punto del infinito es topológicamente equivalente a la inversión de la proyección estereográfica (fig. 80), la cual transforma los puntos de la esfera en el plano tangente a ella en el punto S. El centro N de la proyección es diametralmente opuesto al punto S. Es evidente que el centro N de la proyección corresponde al punto del infinito en el plano (x, y). Recíprocamente, si transformamos el plano en la esfera, entonces un campo vectorial en el plano se transforma en un campo vectorial en la esfera, y el punto del infinito puede resultar un punto singular en la esfera.

Sin embargo, se debe tener presente que a pesar de que el método de inversión es muy útil, él resulta muy incómodo y requiere cálculos voluminosos cuando el punto singular en el infinito tiene una estructura complicada. En estos casos se puede utilizar otra transformación más cómoda del plano (x, y), las denominadas *coordenadas homogéneas*

$$x = \frac{\xi}{z}, \quad y = \frac{\eta}{z}.$$

Esta transformación le pone en correspondencia a cada punto (x, y) una terna de números reales (ξ, η, z) no todos iguales a cero simultáneamente; además, para todo real $k \neq 0$, las ternas (ξ, η, z) y $(k\xi, k\eta, kz)$ no se diferencian entre sí.

www.FreeLibros.me

Si (x, y) es un punto finito, entonces $z \neq 0$. Si $z = 0$, obtenemos una recta en el infinito. El plano (x, y) completado con una recta en el infinito se llama *plano proyectivo*. Dicha recta puede contener varios puntos singulares, cuya naturaleza es, por lo general, más simple que la de los puntos singulares obtenidos mediante una inversión.

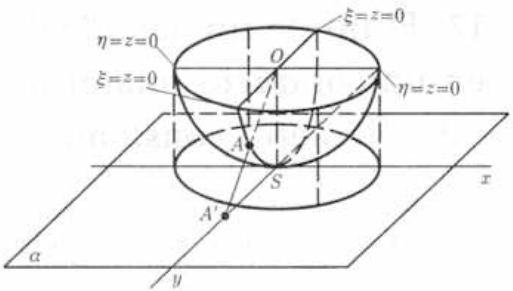

Fig. 81

Si consideramos un haz de rectas y describimos alrededor de su centro una esfera de radio igual, por ejemplo, a la unidad, entonces cada recta del haz se cortará con la esfera en dos puntos diametralmente opuestos. De aquí se deduce que todo punto del plano proyectivo se transforma de modo biunívoco y continuo en un par de puntos diametralmente opuestos de la esfera unidad. De este modo, el plano proyectivo se puede ver como el conjunto de todos los pares de puntos diametralmente opuestos de la esfera unidad. Para imaginarnos el plano proyectivo es suficiente considerar, por ejemplo, la mitad inferior de la esfera y ver sus puntos como puntos del plano proyectivo. Proyectando ortogonalmente la semiesfera inferior en el plano α tangente a la esfera en el polo S (fig. 81), el plano proyectivo se transforma en un círculo unidad en el que los puntos diametralmente opuestos de la frontera se identifican. Cada

www.FreeLibros.me

par de puntos diametralmente opuestos de la frontera corresponde a una *recta impropia* (infinitamente alejada), cuya unión con el plano euclídeo lo transforma en una superficie cerrada: en el plano proyectivo.

12. Flujo de un gas ideal en un conducto rotatorio de diámetro constante

En algunos sistemas de helicópteros y aviones turbohélice, así como en las turbinas de reacción, la mezcla gaseosa de combustible se hace pasar por conductos rotatorios de sección transversal constante situados en la paletas del compresor y unidos mediante un eje vertical hueco. Para establecer las condiciones óptimas de rotación es necesario analizar el paso de la mezcla por el conducto rotatorio y relacionar la solución con las condiciones de contorno propias del conducto. En la paleta, el gas gira junto con ésta alrededor del eje con velocidad angular constante ω y se mueve respecto al conducto con aceleración $v\dfrac{dv}{dr}$, donde v es la velocidad de una partícula de gas respecto al conducto, y r, la coordenada, medida a lo largo de la paleta rotatoria del compresor.

En la figura 82 se presenta el esquema del conducto rotatorio de una paleta del compresor[12]. Se supone que la mezcla de estado

[12] *Kestin J., Zaremba S. K.* Adiabatic one-dimensional flow of a perfect gas through a rotatirig tube of uniform cross-section // Aeronaut. Quart. 1954. V. 4. P. 373–399.

www.FreeLibros.me

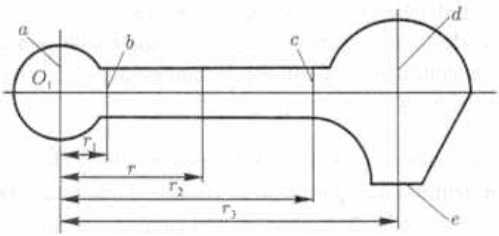

Fig. 82

inicial conocido se suministra por un eje hueco a la cavidad en el eje de rotación, y que la velocidad del flujo en la cavidad es despreciable. Denotemos con a la frontera de permanencia del gas en la cavidad. Supondremos que el gas es un gas ideal con calor específico constante. El coeficiente del proceso isoentrópico (es decir, del proceso adiabático reversible) se representará con la letra γ.

Además, se supone que el gas se dilata en la tobera que termina en la sección b, sección que, a su vez, es la entrada al conducto de diámetro constante. Asumamos que la dilatación del gas del estado a al estado b es isoentrópica; representemos con v_1 la velocidad del gas después de la dilatación, y la distancia desde el eje de rotación O_1 hasta la sección b, mediante r_1.

Al pasar a través del canal de sección transversal constante de área A y diámetro hidráulico D, el gas se acelera bajo la acción combinada del gradiente de presión y de la aceleración dinámica en la paleta rotatoria del compresor. Despreciaremos tanto la influencia del cambio de nivel de presión (si existe tal cambio) como la variación de los gradientes de presión que actúan sobre el plano de la sección transversal y que son consecuencias de las aceleraciones de Coriolis. Esta última suposición requiere, en general, verificación experimental,

www.FreeLibros.me

ya que la existencia de gradientes transversales de presión puede ser la causa de la aparición de flujos adicionales. Sin embargo, si el diámetro del conducto es pequeño en comparación con su longitud, dicha suposición es válida.

Ahora es claro que las ecuaciones de movimiento y de energía de la mezcla comprimida que pasa por un conducto de sección transversal constante y en estado de reposo, deben cambiar su forma en virtud de la fuerza de inercia. En cuanto a la ecuación de continuidad, su forma no varía.

Supongamos también que a partir de la sección c situada al final del conducto, el gas se comprime de modo isoentrópico al pasar por la tobera que se ensancha. El gas pasa al estado de reposo respecto a la paleta del compresor en la segunda cavidad a una distancia r_3 del eje de rotación, y alcanza una presión igual a P_d y una temperatura T_d.

Desde la segunda cavidad el gas se dilata isoentrópicamente por la tobera de sección transversal decreciente (o decreciente-creciente), de modo que abandona la cavidad formando un ángulo recto con el eje del conducto. Así, aparece una fuerza de empuje condicionada por la existencia de un momento de torsión.

En lo sucesivo, para simplificar la exposición consideraremos que la tobera se estrecha y que el área de la sección transversal de salida es A^*. Denotemos la presión exterior (presión atmosférica) mediante P_a, y analicemos dos casos del paso de la mezcla por la tobera. Primero, cuando la relación $\frac{P_a}{P_d}$ supera el valor crítico, es decir, cuando

$$\frac{P_a}{P_d} > \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

www.FreeLibros.me

En este caso, el flujo en la salida de la tobera es subsónico, implicando que la presión P_3 es igual a la presión atmosférica:

$$P_3 = P_a.$$

El segundo caso se presenta cuando la relación $\frac{P_a}{P_d}$ es menor que el valor crítico, o sea, cuando

$$\frac{P_a}{P_d} < \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Aquí la presión P_3 en la salida de la tobera tiene un valor fijo que depende de la presión P_d, pero no de la presión P_a. De este modo,

$$P_3 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} P_d.$$

En este último caso, el flujo en la salida de la tobera posee la velocidad del sonido

$$v_3 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} a_d,$$

donde el valor de la magnitud a_d depende únicamente de la temperatura T_d.

En el análisis futuro supondremos que el flujo es adiabático en todas partes, y que es isoentrópico salvo en el tramo del conducto comprendido entre las secciones b y c.

Al igual que en el caso de la deducción de la ecuación diferencial del flujo adiabático de un gas ideal en una tobera de diámetro variable,

www.FreeLibros.me

nos detendremos en las ecuaciones de continuidad, de movimiento y de energía. La ecuación de continuidad en este caso tiene la forma

$$\psi = \frac{v}{V} = \frac{v_3}{V_3}\frac{A^*}{A} = \text{const}, \tag{160}$$

donde V es el volumen específico y ψ es la densidad de masa del flujo. Escribiendo (160) de otra manera, resulta

$$\psi = \frac{m'}{A},$$

donde m' es la masa del flujo.

Para obtener la ecuación de movimiento haremos uso de la figura 83. Nótese que la acción dinámica del movimiento rotatorio de la paleta del compresor se puede utilizar para describir el movimiento del flujo respecto al conducto en movimiento, donde, de acuerdo con el principio de D'Alembert, se supone que la fuerza de inercia

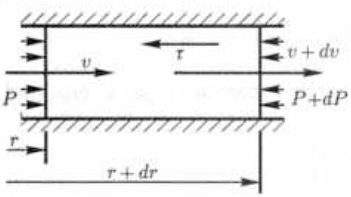

Fig. 83

$$dI = \frac{A}{V}w^2 r\, dr$$

actúa en la dirección positiva r. Entonces el elemento de masa $dm = \frac{A}{V}dr$ se mueve con aceleración $v\frac{dv}{dr}$ bajo la acción de la fuerza de inercia dI, de la presión $A\,dP$ y de la fuerza de rozamiento $dF = \frac{4A}{D}dr$. Aquí $\tau = \lambda\frac{v^2}{2V}$, donde λ depende del número de

www.FreeLibros.me

Reynolds. En una primera aproximación se puede considerar que λ es una magnitud constante a lo largo de todo el conducto. Teniendo en cuenta esto, la ecuación de movimiento se escribe en la forma

$$\frac{A}{V}\,dr\,v\frac{dv}{dr} = -A\,dP - \frac{2\lambda A v^2}{VD}\,dr + \frac{A}{V}w^2 r\,dr,$$

o, después de simplificar,

$$V\,dP + v\,dv + \frac{2\lambda}{D}v^2\,dr - w^3 r\,dr = 0. \tag{161}$$

La ecuación de energía se obtiene fácilmente con ayuda del primer principio de la termodinámica para sistemas cerrados y teniendo presente que la cantidad de trabajo realizado por el sistema es $w^2 r\,dr$. De este modo,

$$dh + v\,dv - w^2 r\,dr = 0,$$

donde h es la entalpía.

Determinando la velocidad a del sonido con la fórmula

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1},$$

obtenemos que

$$a\,da + \frac{\gamma - 1}{2}v\,dv - \frac{\gamma - 1}{2}w^2 r\,dr = 0.$$

De aquí, la ecuación de energía es

$$a_0^2 = a^2 + \frac{\gamma - 1}{2}v^2 - \frac{\gamma - 1}{2}w^2 r^2. \tag{162}$$

www.FreeLibros.me

Introduciendo las magnitudes adimensionales

$$M_0 = \frac{v}{a_0}, \quad x = \frac{r}{D}, \quad G^2 = \frac{w^2 D^2}{a_0^2}, \tag{163}$$

llegamos a la igualdad

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} G^2 x^2. \tag{164}$$

Despejando la presión y el volumen específico de las ecuaciones fundamentales (160), (161) y (164), es posible obtener una ecuación que relacione la magnitud adimensional M_0 con la distancia adimensional. Esta ecuación es precisamente la ecuación diferencial fundamental para la resolución del problema analizado. De la ecuación de continuidad (160) sigue que

$$V = \frac{v}{\psi}. \tag{165}$$

Tomando en consideración las igualdades

$$a^2 = \gamma P V = \frac{\gamma P v}{\psi},$$

a partir de la ecuación (162) obtenemos

$$P = \left(\frac{a_0^2}{\gamma v} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} v + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{w^2}{v} r^2 \right) \psi,$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{w^2 r}{v} - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{a_0^2}{\gamma v^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{w^2 r^2}{v^2} \right) \frac{dv}{dr}. \tag{166}$$

www.FreeLibros.me

Sustituyendo el valor de V de la ecuación (165) y $\dfrac{dP}{dr}$ de la ecuación (166) en la ecuación de movimiento (161) y teniendo en cuenta las expresiones (163), resulta la ecuación diferencial

$$\frac{dM_0^2}{dx} = \frac{2M_0^2\left(2\lambda\gamma M_0^2 - G^2x\right)}{1 - \dfrac{\gamma+1}{2}M_0^2 + \dfrac{\gamma-1}{2}G^2x^2}. \tag{167}$$

Haciendo

$$M_0^2 = y, \quad m = 2\lambda\gamma, \quad p = \frac{1}{2}(\gamma+1), \quad q = \frac{1}{2}(\gamma-1),$$

la ecuación (167) se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y\left(my - G^2x\right)}{1 - py + qG^2x^2}. \tag{168}$$

La ecuación diferencial (168) es nuestro objeto de investigación posterior. El cambio de variable (159) reduce la ecuación (168) a la forma

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{2\xi\eta\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2 - p\eta\left(\xi^2+\eta^2\right) + qG^2\xi^2\right] + 2\eta\left(\eta^2-\xi^2\right)\left(m\eta - G^2\xi\right)}{\left(\xi^2-\eta^2\right)\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2 - p\eta\left(\xi^2+\eta^2\right) + qG^2\xi^2\right] + 4\xi\eta^2\left(m\eta - G^2\xi\right)}. \tag{169}$$

Es claro que el origen de coordenadas es un punto singular de la ecuación (169). Tanto en el numerador como en el denominador, los términos de menor orden son los de segundo orden. Si despreciamos los términos de órdenes superiores (como se describe en la página 177,

www.FreeLibros.me

cuando analizamos los puntos de equilibrio de orden superior), obtenemos que

$$Y_4(\xi,\eta) = 2qG^2\xi^3\eta + 2\eta(\eta^2 - \xi^2)(m\eta - G^2\xi),$$
$$X_4(\xi,\eta) = qG^2\xi^2(\xi^2 - \eta^2) + 4\xi\eta^2(m\eta - G^2\xi),$$

lo que significa que el origen de coordenadas es un punto singular de orden superior. La ecuación característica simplificada de la ecuación diferencial (169) es

$$\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)\left[(q+2)G^2\xi - 2m\eta\right] = 0. \tag{170}$$

De aquí resultan las rectas excepcionales reales

$$\begin{aligned} &\text{a) } \xi = 0,\\ &\text{b) } \eta = 0,\\ &\text{c) } (q+2)G^2\xi - 2m\eta = 0, \end{aligned} \tag{171}$$

cada una de las cuales es regular y corresponde a uno de los factores de la ecuación (170).

Para los valores positivos de ξ y η, el valor $X_4(\xi,\eta)$ es positivo en un entorno de todas las tres rectas excepcionales; consiguientemente, en el primer cuadrante y en un entorno de dichas rectas la expresión

$$\frac{Y_4(\xi,\eta)}{X_4(\xi,\eta)} - \frac{\eta}{\xi} = \frac{\xi\eta(\xi^2+\eta^2)\left[(q+2)G^2\xi - 2m\eta\right]}{\xi\left[qG^2\xi^2(\xi^2-\eta^2) + 4\xi\eta^2(m\eta - G^2\xi)\right]} \tag{172}$$

tiene el mismo signo que el primer miembro de la igualdad (171 c), es decir, tiene signo negativo por debajo de la recta (171 c) y signo

www.FreeLibros.me

positivo por encima de ella. Lo último se debe a que la expresión (172) puede cambiar de signo solamente al pasar a través de una recta excepcional. Geométricamente, esto significa que sobre los radios situados en el primer cuadrante entre las rectas (171 b) y (171 c), el segundo miembro de la ecuación diferencial

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Y_4(\xi, \eta)}{X_4(\xi, \eta)},$$

la cual determina el comportamiento de las curvas integrales en un círculo con centro en el origen de coordenadas y radio suficientemente pequeño, define un ángulo mayor que el ángulo de inclinación de los radios. Sobre los radios dispuestos entre las rectas (171 c) y (171 a), el segundo miembro de la última ecuación diferencial define un ángulo menor que el ángulo de inclinación de los radios (fig. 84). En consecuencia, el dominio normal que contiene a la recta (171 c) es de segundo tipo. En virtud de la simetría del campo definido por el vector (X_4, Y_4), estos resultados son válidos también para los dominios normales obtenidos de los anteriores mediante un giro de 180° alrededor del punto singular.

Fig. 84

Así pues, existen exactamente dos curvas integrales que "entran" en el punto singular por la tangente (171 c) e infinitas curvas integrales que son tangentes a los ejes coordenados (171 a) y (171 b) en el punto de reposo.

www.FreeLibros.me

Como se ve, el segundo y cuarto cuadrantes contienen sectores elípticos, ya que están dispuestos entre dos dominios normales consecutivos de primer tipo (fig. 85). Cada uno de los cuadrantes primero y tercero es dividido en dos sectores por curvas integrales tangentes a la recta excepcional (171 c) en el origen de coordenadas. Dichos sectores son parabólicos, puesto que se encuentran entre dos dominios normales consecutivos, uno de los cuales es de primer tipo, y el otro, de segundo. Además, todas las líneas integrales, salvo aquéllas que son tangentes a la recta (171 c), son tangentes a los ejes de coordenadas (171 a) y (171 b) en el punto singular.

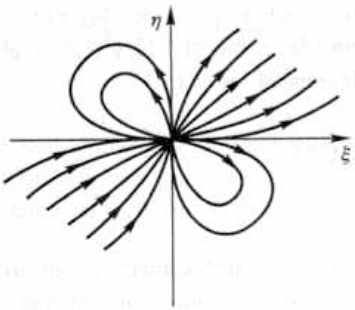

Fig. 85

Desde un punto de vista físico, la ecuación diferencial (108) tiene sentido solamente en el primer cuadrante del plano (x, y). Regresando a este plano, vemos que existe únicamente una curva integral con dirección asintótica de pendiente

$$(q+2)\frac{G^2}{2m}.$$

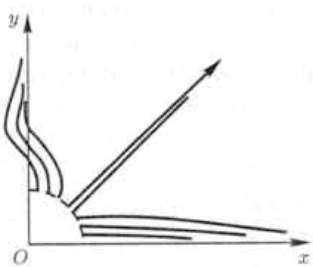

Fig. 86

La curvas integrales restantes admiten como dirección asintótica a uno de los ejes de coordenadas. De hecho, se puede demostrar que todas estas curvas se acercan asintóticamente a uno de los ejes

www.FreeLibros.me

coordenados, es decir, que al tender a infinito no sólo $\frac{y}{x} \to 0$ ó $\frac{x}{y} \to 0$ en cada una de ellas, sino que en realidad $y \to 0$ ó $x \to 0$. Este hecho se ilustra en la figura 86, donde aparecen algunas de las curvas integrales para valores grandes de x e y. El cuadro de comportamiento de las curvas integrales a una distancia finita del origen de coordenadas depende, ante todo, de la disposición de los puntos singulares, y exige un examen especial. Se puede demostrar, además, que las curvas integrales que se acercan asintóticamente a los ejes de coordenadas (fig. 86), abandonan el primer cuadrante a una distancia finita del origen de coordenadas.

13. Trayectorias cerradas aisladas

Ya sabemos que en el caso de un centro cierta región del plano de fase está densamente poblada de trayectorias cerradas. Sin embargo, se puede presentar una situación más compleja cuando se tiene una trayectoria cerrada aislada, es decir, una trayectoria cerrada que posee un entorno donde no se contienen otras trayectorias cerradas. Este último caso está directamente relacionado con la cuestión de la existencia de soluciones periódicas aisladas. Y resulta interesante que las trayectorias cerradas aisladas sólo pueden tener ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

Las soluciones periódicas aisladas están relacionadas con una gran variedad de propiedades de los fenómenos y procesos que tienen lugar en la biología y la radiofísica, en la teoría de oscilaciones y en la astronomía, en la medicina y en la teoría de construcción de instrumentos. Las soluciones de este tipo también aparecen al estudiar los modelos diferenciales en economía, en la resolución de muchos

www.FreeLibros.me

problemas de control automático, de construcción de aviones, etcétera. Más adelante estudiaremos la posibilidad de surgimiento de soluciones periódicas aisladas al investigar los procesos en redes eléctricas. Como modelo consideraremos el sistema diferencial no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right), \\ \frac{dy}{dt} &= x + y\left(1 - x^2 - y^2\right). \end{aligned} \tag{173}$$

Para resolver el sistema (173), introduzcamos las coordenadas polares r, θ mediante las fórmulas $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Derivando las expresiones $x^2 + y^2 = r^2$ y $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ respecto a t, obtenemos las igualdades

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt}. \tag{174}$$

Multiplicando la primera ecuación del sistema (173) por x y la segunda por y, sumando las ecuaciones resultantes, y teniendo en cuenta la primera igualdad de (174), hallamos

$$r\frac{dr}{dt} = r^2\left(1 - r^2\right). \tag{175}$$

Si ahora multiplicamos la segunda ecuación de (173) por x y la primera por y, y las restamos teniendo en cuenta la segunda ecuación de (174), obtenemos

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = r^2. \tag{176}$$

El sistema (173) posee un único punto singular $O(0, 0)$. Ya que por ahora nos interesa solamente la construcción de la trayectoria,

www.FreeLibros.me

podemos asumir que $r > 0$. Entonces las ecuaciones (175) y (176) indican que el sistema (173) se redujo a la forma

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \tag{177}$$

Integrando las ecuaciones del sistema (177) obtenemos toda la familia de sus soluciones:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad \theta = t + t_0, \tag{178}$$

o, regresando a las variables iniciales x e y,

$$x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad y = \frac{\operatorname{sen}(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}.$$

Haciendo $C = 0$ en la primera ecuación de (178), llegamos a las ecuaciones

$$r = 1, \quad \theta = t + t_0.$$

Estas igualdades definen una trayectoria cerrada: la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Si $C < 0$, entonces es evidente que $r > 1$ y $r \to 1$ cuando $t \to +\infty$. Si $C > 0$, entonces $r < 1$ y nuevamente $r \to 1$ cuando $t \to +\infty$. Esto quiere decir que existe una única trayectoria cerrada ($r = 1$) a la cual las demás trayectorias se aproximan con el tiempo formando espirales (fig. 87).

Las trayectorias de fase cerradas que poseen esta propiedad se conocen con el nombre de *ciclos límites* o, con más precisión, *ciclos límites (orbitalmente) estables*. El hecho consiste en que existen otros dos tipos de ciclos límites. Un ciclo límite se denomina (*orbitalmente*)

www.FreeLibros.me

inestable si todas sus trayectorias vecinas se alejan de él por espirales cuando $t \to +\infty$. Un ciclo límite se llama (*orbitalmente*) *semiestable* si, cuando $t \to +\infty$, todas las trayectorias a un lado del ciclo (por ejemplo, las de adentro) se enrollan tendiendo hacia él, y al otro lado (las de afuera) se desenrollan alejándose del ciclo límite.

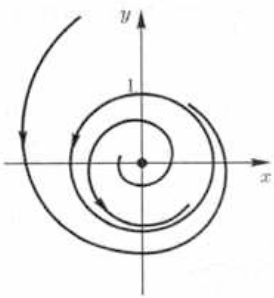

Fig. 87

En el ejemplo estudiado arriba pudimos hallar la ecuación de una trayectoria de fase cerrada, pero en el caso general esto no es posible. Por tal razón, en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias juegan un papel importante los criterios que permiten, al menos, indicar las regiones que pueden contener ciclos límites. Nótese que una trayectoria cerrada del sistema (122), en caso de existir, necesariamente contiene en su interior al menos un punto singular de dicho sistema. De aquí, en particular, se deduce que, si en cierta región del plano de fase no hay puntos singulares del sistema diferencial, entonces en esta región no hay trayectorias cerradas.

Supongamos que una región D del plano de fase está acotada junto con su frontera y no contiene puntos singulares del sistema (122). Entonces se verifica el *criterio de Poincaré—Bendixson* que afirma que *si* Γ *es una trayectoria del sistema* (122) *que en el instante inicial* $t = t_0$ *parte de un punto de* D *y permanece en* D *para todo* $t \geqslant t_0$, *entonces bien* Γ *es una trayectoria cerrada, bien con el transcurso del tiempo* Γ *se aproxima por una espiral a una trayectoria cerrada.*

Ilustremos este hecho utilizando la figura 88. Aquí la región D está compuesta por las curvas cerradas Γ_1 y Γ_2 y la región anular

www.FreeLibros.me

comprendida entre ellas. Asignemos a cada punto frontera (x, y) de la región D el vector

$$\mathbf{V}(x, y) = X(x, y)\,\mathbf{i} + Y(x, y)\,\mathbf{j}.$$

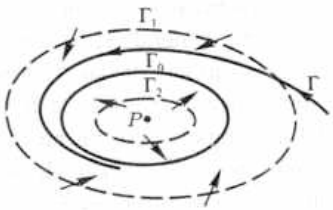

Fig. 88

Si la trayectoria Γ, que en el instante inicial $t = t_0$ parte de un punto frontera de D, entra en D y permanece allí para $t \geqslant t_0$, entonces, de acuerdo con el criterio que acabamos de formular, la trayectoria Γ se aproximará por una espiral hacia cierta trayectoria cerrada Γ_0 contenida en la región D. Además, la curva Γ_0 deberá abarcar un punto singular del sistema diferencial (punto P) no contenido en D.

El sistema diferencial (173) proporciona un ejemplo simple de aplicación del criterio de Poincaré—Bendixson durante la búsqueda de ciclos límites. En efecto, el único punto singular del sistema (173) es $O(0, 0)$. Por consiguiente, en la región D, entre las circunferencias de radios $r = \dfrac{1}{2}$ y $r = 2$ no hay puntos singulares. Partiendo de la primera ecuación del sistema (177) vemos que $\dfrac{dr}{dt} > 0$ en la circunferencia interior, mientras que $\dfrac{dr}{dt} < 0$ en la circunferencia exterior. El vector $\mathbf{V}$ asociado a los puntos frontera de la región D siempre está orientado hacia el interior de D. Esto significa que en la región anular entre las circunferencias de radios $r = \dfrac{1}{2}$ y $r = 2$ debe haber una trayectoria cerrada del sistema diferencial (173). Dicha trayectoria realmente existe y, en este caso, es la circunferencia de radio $r = 1$.

www.FreeLibros.me

En la práctica es muy difícil aplicar el criterio de Poincaré—Bendixson al sistema general (122), puesto que no existen métodos generales de construcción de las regiones correspondientes y, por tanto, el éxito depende tanto de la forma del sistema como de la habilidad del investigador. Al mismo tiempo, es necesario tener presente que la búsqueda de criterios de ausencia de ciclos límites es no menos importante que la búsqueda de criterios de existencia. El criterio de ausencia de ciclos límites más difundido es el *criterio de Dulac*, el cual afirma que *si existe una función* $B(x, y) > 0$ *continua junto con sus derivadas parciales, y tal que en cierta región simplemente conexa del plano de fase la función*

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

es de signo definido[13], *entonces en la región* D *no hay ciclos límites del sistema diferencial* (122).

Para $B(x, y) \equiv 1$, el criterio de Dulac se conoce como *criterio de Bendixson*.

En el caso de la ecuación diferencial (156), la cual describe un flujo adiabático unidimensional de un gas ideal con calor específico constante en un conducto con rozamiento, tenemos

$$X(x, y) = (1 - y)F(x),$$
$$Y(x, y) = 4y\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}y\right)\left(\gamma q y - F'(x)\right).$$

[13] Definida positiva o definida negativa.

www.FreeLibros.me

Haciendo

$$B(x, y) = \left[4yF(x)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}y\right)\right]^{-1}.$$

resulta

$$\frac{\partial(XB)}{\partial x} + \frac{\partial(XB)}{\partial y} \equiv \frac{\gamma q}{F(x)} > 0,$$

lo que significa que la ecuación (150) no tiene curvas integrales cerradas.

Definamos el concepto de *índice de un punto singular*, concepto que será utilizado cuando nos cuestionemos la existencia de los ciclos límites.

Sea Γ una curva cerrada simple (o sea, sin autointersecciones) que no es necesariamente una trayectoria del sistema diferencial (122). Supongamos que Γ pertenece al plano de fase y no pasa por los puntos singulares de este sistema. Si $P(x, y)$ es un punto de la curva Γ, entonces el vector

$$\mathbf{V}(x, y) = X(x, y)\,\mathbf{i} + Y(x, y)\,\mathbf{j},$$

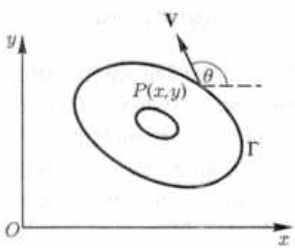

Fig. 89

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ son los versores de los ejes de coordenadas cartesianas, no es nulo y, consiguientemente, tiene una dirección determinada, la cual está dada por cierto ángulo θ (fig. 89). Si el punto $P(x, y)$ da una vuelta completa al moverse por la curva Γ en algún sentido fijo (por ejemplo, en contra del movimiento de las agujas del reloj),

www.FreeLibros.me

entonces el vector **V** realiza un número entero de vueltas, es decir, el ángulo θ se incrementa en $\Delta\theta = 2\pi n$, donde n es un número entero positivo, negativo o igual a cero. El número n se denomina *índice de la curva cerrada* Γ (*índice del ciclo* Γ).

Si comenzamos a contraer continuamente el ciclo Γ de modo que durante la deformación él no pase por un punto singular de un campo vectorial dado, entonces el índice del ciclo debe, por una parte, cambiar continuamente y, por otra, permanecer igual a un número entero. Esto significa que durante una deformación continua el índice del ciclo no cambia. Partiendo de esta propiedad, por *índice de un punto singular* se entiende el índice de una curva cerrada simple que rodea a dicho punto. Veamos algunas propiedades de los índices:

1) *el índice de una trayectoria cerrada del sistema* (122) *es igual a* $+1$;
2) *el índice de una curva cerrada que abarca varios puntos singulares es igual a la suma de los índices de dichos puntos;*
3) *el índice de una curva cerrada que no abarca ningún punto singular es igual a cero.*

De aquí, se deduce en particular que como el índice de una trayectoria cerrada del sistema (122) siempre es igual a 1, entonces una trayectoria cerrada debe encerrar un punto singular con índice $+1$ ó varios puntos singulares con índice total igual a $+1$. Este hecho se utiliza con mucha frecuencia para demostrar la ausencia de ciclos límites.

El índice de un punto singular se calcula mediante la fórmula

$$n = 1 + \frac{e - h}{2}, \tag{179}$$

donde e es el número de sectores elípticos y h es el número de sectores hiperbólicos. En la práctica se puede emplear la siguiente técnica

www.FreeLibros.me

sencilla para calcular el índice de un punto singular. Sea L un ciclo que no pasa por ningún punto singular del sistema diferencial (122) y que tiene a lo sumo un número finito de puntos comunes con cualquier trayectoria de dicho sistema (las trayectorias pueden cortar la curva L o ser tangentes a ella). En caso de que haya tangencia (fig. 90), se consideran solamente los puntos de tangencia externos (como el punto A) e internos (como el B). Las tangencias en los puntos de inflexión (como el punto C) no se consideran. Para calcular el índice del punto singular, se utiliza la fórmula (179), donde e y h son, respectivamente, las cantidades de puntos internos y externos de tangencia de las trayectorias del sistema (122) con el ciclo L.

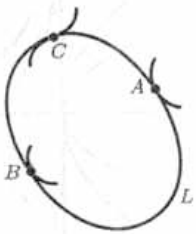

Fig. 90

En la figura 91 se muestran puntos singulares con índices 0, +2, +3, +1 y −2, respectivamente.

Señalamos que la construcción del cuadro completo del comportamiento de las trayectorias de fase del sistema diferencial (122) se facilita introduciendo el punto del infinito mediante la transformación (159). En topología existe un teorema bastante general que afirma que cuando un campo vectorial continuo que posee un número finito de puntos singulares se define sobre una esfera, la suma de sus índices es igual a +2. Así pues, si la suma de los índices de todos los puntos singulares de un sistema diferencial (con un número finito de puntos singulares) pertenecientes a una parte finita del plano de fase, es diferente de +2, entonces el punto del infinito es un punto singular con índice no nulo.

Pero si en lugar de una inversión se utilizan coordenadas homogéneas, entonces la suma de los índices de todos los puntos singulares será

www.FreeLibros.me

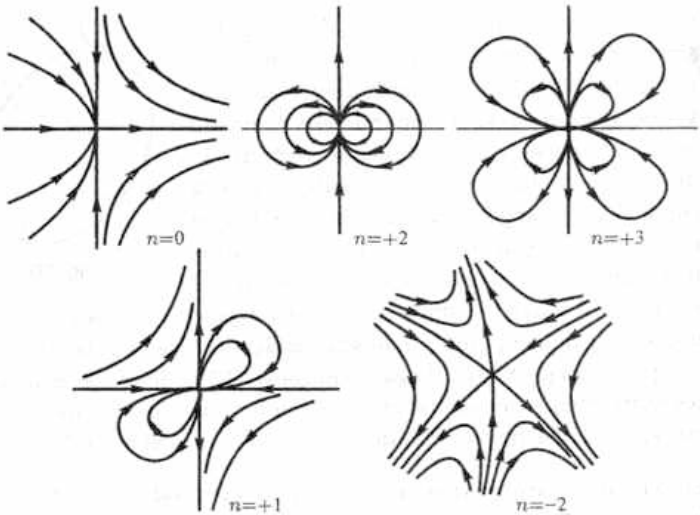

Fig. 91

igual a $+1$. De hecho, si se proyecta el plano sobre una esfera con centro de proyección en el centro de la esfera, entonces dos puntos de la esfera corresponden a un punto del plano proyectivo, y la circunferencia del círculo máximo, paralelo al plano, corresponde a una recta en el infinito.

Si nos remitimos a la ecuación (168), la cual describe un flujo unidimensional adiabático de un gas ideal por un conducto rotatorio de diámetro constante, entonces, como se ve en la figura 85, para el punto singular del infinito tenemos que $e = 2$, $h = 0$, resultando que el índice de este punto es igual a $+2$ y no depende de los valores de las constantes en la ecuación (168). De lo anterior sigue, en particular, que la suma de los índices de los puntos singulares

www.FreeLibros.me

finitos es igual a cero. Se puede demostrar que en dependencia de si la recta $my - G^2x = 0$ se corta en dos puntos, en un punto de multiplicidad dos o en ningún punto con la parábola $1 - py + qG^2x^2 = 0$ (lo que equivale, respectivamente, al cumplimiento de las condiciones $G > G_0$, $G = G_0$, $G < G_0$, donde $G_0 = \dfrac{2m\sqrt{q}}{p}$), entonces tienen lugar las siguientes combinaciones de puntos singulares finitos:

a) $G > G_0$. Un punto de silla y un nodo.
b) $G = G_0$. Un punto singular de orden superior con dos sectores hiperbólicos ($h = 2$) y dos sectores parabólicos ($e = 0$).
c) $G < G_0$. No hay puntos singulares.

Como era de esperar, en todos los casos la suma de los índices es igual a cero.

14. Regímenes periódicos en circuitos eléctricos

Analicemos el surgimiento de ciclos límites en el ejemplo del funcionamiento de un *oscilador de Van der Pol* (fig. 92), llamado también *oscilador dinatrón*. Aunque el fenómeno relacionado con la aparición de los ciclos límites se puede ilustrar con ejemplos de la mecánica, la biología, la economía, etcétera, nosotros mostraremos cómo es que ellos surgen en los circuitos eléctricos.

En la figura 92 se muestra el esquema de un oscilador de Van der Pol, cuyas características i_a, v_a se representan mediante la línea continua de la figura 93. Aquí i_a es la corriente y v_a es la tensión en la válvula

www.FreeLibros.me

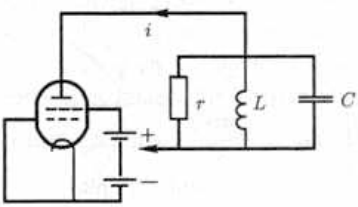

Fig. 92

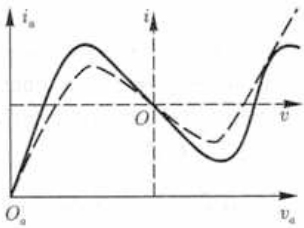

Fig. 93

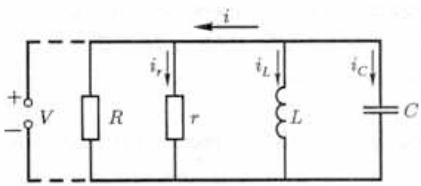

Fig. 94

de vacío. El circuito tiene resistencia r, inductancia L y capacidad C conectadas en paralelo y en serie con el dinatrón. El circuito real puede ser sustituido por el circuito de la figura 94. En este caso, podemos aproximar la característica de la válvula con un polinomio de tercer grado $i = \alpha v + \gamma v^3$ (línea discontinua de la figura 93). Aquí i y v son las coordenadas en el sistema con origen en el punto de inflexión O. Como se puede ver en la figura 93, son válidas las desigualdades

$$\alpha > 0, \quad \gamma > 0.$$

En concordancia con una de las leyes de Kirchhoff,

$$i + i_r + i_L + i_C = 0,$$

donde $i_r = \dfrac{v}{r}$, $L\dfrac{di_L}{dt} = v$, $i_C = C\dot{v}$. Tras una serie de operaciones sencillas, llegamos a la ecuación diferencial

www.FreeLibros.me

$$\ddot{v} + \left(\frac{\alpha}{C} + \frac{1}{rC} + \frac{3\gamma}{C}v^2\right)\dot{v} + \frac{1}{LC} = 0. \qquad (*)$$

Haciendo

$$\frac{\alpha}{C} + \frac{1}{rC} = a, \quad \frac{3\gamma}{C} = b, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

la ecuación $(*)$ se convierte en la denominada *ecuación de Van der Pol*

$$\ddot{v} + \left(a + bv^2\right)\dot{v} + \omega_0^2 v = 0.$$

Haciendo uso de la transformación

$$\dot{v} = y, \quad \ddot{v} = y\frac{dy}{dv},$$

la ecuación de Van der Pol se puede poner en correspondencia con la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{\left(a + bv^2\right)y + \omega_0^2 v}{y} = \frac{Y(v, y)}{V(v, y)}. \qquad (180)$$

El único punto singular finito aquí es el origen de coordenadas, verificándose que

$$J^*(0, 0) = \omega_0^2 > 0, \quad D(v, y) = -\left(a + bv^2\right).$$

Como $b > 0$, suponiendo que $a > 0$, concluimos que la divergencia D no cambia de signo, y, por tanto, la última ecuación no puede tener curvas integrales cerradas. Por esto, vamos a considerar únicamente el caso $a < 0$, es decir, $\alpha < -\frac{1}{r}$. De aquí se infiere que $D(0, 0) = -a > 0$,

www.FreeLibros.me

lo que significa que el punto singular es un nodo o un foco. Si analizamos el sistema diferencial

$$\frac{dy}{dt} = Y(v, y), \quad \frac{dv}{dt} = V(v, y),$$

asociado a la ecuación (180), podremos notar que cuando t crece el punto imagen se aleja del punto singular. Por tanto, una trayectoria que parta del punto del infinito no podrá alcanzar el punto singular en el origen de coordenadas para ningún valor de t, incluido $t = +\infty$. De aquí se infiere que si demostramos que una trayectoria que parte del punto del infinito tiene forma de espiral que se enrolla alrededor del origen de coordenadas cuando $t \to +\infty$, entonces garantizamos la existencia de, al menos, un ciclo límite.

La existencia de tal ciclo se puede demostrar numérica o analíticamente. El método numérico de demostración, propuesto por primera vez por el físico y matemático holandés Balthazar Van der Pol, consiste en construir una trayectoria que parta de un punto suficientemente alejado del origen de coordenadas, y luego verificar si posee la propiedad que acabamos de indicar. Este procedimiento proporciona una aproximación a un ciclo límite, pero se puede utilizar solamente para valores numéricos concretos.

Expongamos un esquema analítico de demostración basado en el análisis de singularidades en el infinito [14]. A diferencia del método de análisis de la ecuación (168), utilizaremos una transformación de

---

[14] *Kestin J., Zaremba S. E.* Geometrical methods in the analysis of ordinary differential equations // Appl. Sci. Res., sect. B. 1953. V. 3. P. 144–189.

www.FreeLibros.me

coordenadas homogéneas más cómoda:

$$v = \frac{\xi}{z}, \quad y = \frac{\eta}{z}. \tag{181}$$

Aquí la recta en el infinito tiene ecuación $z = 0$. Para reducir el número de incógnitas a dos, eliminemos primeramente el punto $\xi = z = 0$, haciendo $\xi = 1$:

$$v = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{\eta}{z}.$$

En este caso, el sistema diferencial correspondiente a la ecuación (180) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\eta z, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{(az^2 + b)\eta + \omega_0^2 z^2}{z^2} - \eta^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Por comodidad, introduzcamos un nuevo parámetro θ haciendo

$$dt = z^2\, d\theta, \tag{182}$$

con lo que el sistema $(*)$ toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\theta} &= -(az^2 + b)\eta - \omega_0^2 z^2 - \eta^2 z^2 = \mathcal{Y}, \\ \frac{dz}{d\theta} &= -\eta z^3 = \mathcal{Z}. \end{aligned} \tag{183}$$

Nótese, ante todo, que la recta en el infinito $z = 0$ es una trayectoria del sistema diferencial (183), y cuando t aumenta (consiguientemente,

www.FreeLibros.me

θ aumenta), el punto imagen se mueve por ella en la dirección del único punto singular $z = \eta = 0$. La ecuación característica, que en este caso es

$$-b\eta z = 0,$$

determina la dirección excepcional regular $z = 0$, a la que corresponden dos dominios de segundo tipo, lo cual se puede deducir analizando el campo vectorial (fig. 95). La segunda dirección excepcional $\eta = 0$ es singular, por lo que aquí se requieren razonamientos adicionales.

El lugar geométrico de los puntos $\mathcal{Y} = 0$ es una curva que es tangente a la recta $\eta = 0$ en el origen de coordenadas y que pasa por los cuadrantes segundo y tercero (fig. 95), permitiendo determinar tres direcciones I, II y III a ambos lados del eje de simetría $z = 0$. La región entre la curva $\mathcal{Y} = 0$ y el eje $\eta = 0$ es topológicamente equivalente a dos dominios de segundo tipo. De este modo, existe al menos una trayectoria a cada lado de la recta $\eta = 0$, las cuales son tangentes a esta última en el origen de coordenadas.

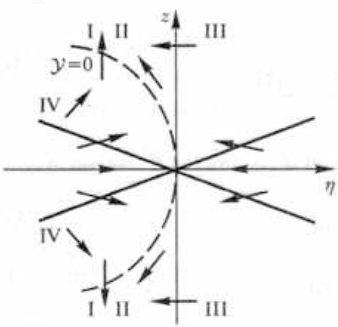

Fig. 95

Si consideramos ahora la ecuación diferencial

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^3} + \frac{\omega_0^2}{\eta z} + \frac{\eta}{z} = f(\eta,\ z),$$

www.FreeLibros.me

podemos notar que en el segundo cuadrante, entre la curva $\mathcal{Y} = 0$ y el eje $\eta = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\eta^2}\right) < 0$$

para valores pequeños de $|\eta|$. Consecuentemente, si se toman dos trayectorias de fase con el mismo valor de η, se puede ver que los puntos imagen que siguen estas trayectorias divergen cuando disminuye z. Esto significa que a cada lado de la recta $\eta = 0$ existe sólo una trayectoria de fase, y que estas trayectorias son tangentes a $\eta = 0$ en el origen de coordenadas y están contenidas en el dominio dado. También está claro que el cuadro cualitativo es simétrico respecto al eje $z = 0$. Además, por cuanto

$$\left|\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{Z}}\right| \geqslant \frac{\omega_0^2}{|\eta z|}$$

para valores pequeños de z y valores positivos de η, entonces no existen curvas que sean tangentes al eje $\eta = 0$ en el origen de coordenadas y que pasen por el primer o por el cuarto cuadrantes. En la región a la izquierda de la curva $\mathcal{Y} = 0$ tampoco hay curvas de éstas, pues en ese caso $\mathcal{Y} > 0$, y $\mathcal{Z}$ tiene el mismo signo que z (fig. 95, flechas IV). Este análisis permite concluir que el punto singular $\eta = z = 0$ es un punto de silla. Las dos trayectorias de fase que alcanzan este punto cuando $t \to +\infty$ son segmentos de la recta en el infinito ($z = 0$) que unen el punto anterior con el punto $\xi = z = 0$. Las otras dos trayectorias de fase alcanzan el punto de silla cuando $t \to -\infty$.

En este análisis no hemos examinado el punto $\xi = z = 0$. Para concluir la investigación, hagamos $\eta = 1$ en las fórmulas (181).

www.FreeLibros.me

Entonces el sistema diferencial asociado a la ecuación diferencial (180) adopta la forma

$$\frac{d\xi}{d\theta} = z^2 + \xi\left(az^2 + b\xi^2 + \omega_0^2\xi z^2\right) = P,$$
$$\frac{dz}{d\theta} = z\left(az^2 + b\xi^2 + \omega_0^2\xi z^2\right) = Q,$$

donde la variable θ está definida por la fórmula (182). El punto $\xi = z = 0$ es singular, y la ecuación característica es $z^3 = 0$. Por tanto, la dirección excepcional $z = 0$ es singular. La curva $P(\xi, z) = 0$ es tangente al eje $z = 0$ en el origen de coordenadas y tiene allí un punto de retroceso (fig. 96). La curva $Q(\xi, z) = 0$ tiene un punto múltiple en el origen de coordenadas. Investigando los signos de las funciones P y Q podemos determinar el carácter del campo vectorial (fig. 96), así como el cuadro del comportamiento de las trayectorias de fase en un entorno del punto singular $\xi = z = 0$ (fig. 97).

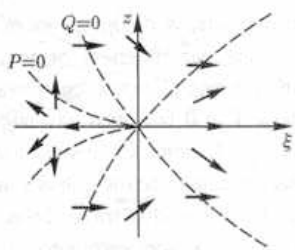

Fig. 96

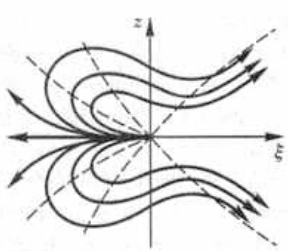

Fig. 97

En el primer y cuarto cuadrantes se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{z}{\xi}\right| > \left|\frac{Q}{P}\right|;$$

www.FreeLibros.me

esto significa que lejos del eje $\xi = 0$ no hay trayectorias de fase que entren en el punto singular por la derecha.

Los razonamientos expuestos muestran que la ecuación de Van der Pol no tiene trayectorias de fase que tiendan a infinito cuando t aumenta. Dicho de otro modo, la ecuación de Van der Pol tiene al menos un ciclo límite.

15. Curvas sin contacto

En casos relativamente sencillos, el cuadro completo del comportamiento de la curvas integrales de la ecuación diferencial dada o, lo que es lo mismo, de las trayectorias de fase del sistema diferencial asociado, está definido por el tipo de puntos singulares y por las curvas integrales cerradas (trayectorias de fase), si estos existen. A veces el cuadro cualitativo se puede construir si, además de clasificar los puntos singulares, se logran hallar las curvas (separatrices) que "relacionan" los puntos singulares. Desafortunadamente, no hay métodos generales de resolución efectiva de este problema. A propósito, en la integración cualitativa puede resultar útil el empleo de las denominadas *curvas sin contacto*. Recordemos que una curva o un arco de curva con tangente continua se denomina *curva* (*arco*) *sin contacto* si no tiene puntos de tangencia con el vector (X, Y) del sistema (112). De esta definición se infiere que el vector (X, Y) debe estar dirigido en la curva siempre hacia un mismo lado. De este modo, una curva sin contacto puede ser cortada por las curvas de fase del sistema (122) en un sentido cuando t aumenta, y en el otro cuando t disminuye. Es por eso que el conocimiento de las curvas sin contacto respectivas puede proporcionar la información necesaria sobre el comportamiento de la trayectoria de fase elegida.

www.FreeLibros.me

Al integrar cualitativamente las ecuaciones diferenciales se pueden utilizar diversas desigualdades auxiliares. Por ejemplo, si tenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = g(x, y),$$

y se sabe que en cierta región D se cumple la desigualdad $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, entonces, denotando con $y_1(x)$ la solución de la primera ecuación que satisface la condición $y_1(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$, y con $y_2(x)$ la solución de la segunda ecuación con las mismas condiciones iniciales, se puede demostrar que $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ para $x \geqslant x_0$ en la región D. Si se cumple la desigualdad estricta $f(x, y) < g(x, y)$ en la región D, entonces $y_1(x) < y_2(x)$ para $x > x_0$ en la región D, y la curva $y = y_2(x)$ es una curva sin contacto.

Como ejemplo, veamos la ecuación diferencial (168). Nosotros ya mostramos que si $G > G_0$, entonces esta ecuación admite dos puntos singulares finitos (un punto de silla y un nodo) que son los puntos de intersección de la recta $my - G^2x = 0$ con la parábola $1 - py + qG^2x^2 = 0$. Los segmentos de recta y de parábola que unen estos dos puntos singulares finitos son curvas sin contacto y limitan cierta región del plano que denotaremos mediante Δ. Tomando

$$X(x, y) = 1 - py + qG^2x^2,$$
$$Y(x, y) = 2y\left(my - G^2x\right),$$

es fácil ver que en la frontera de la región Δ el vector (X, Y) está orientado hacia afuera, excepto en los puntos singulares. Consiguientemente, un punto imagen que parta de cualquier punto interior de Δ siguiendo una curva integral cuando t disminuye, no podrá abandonar la región Δ sin pasar por uno de los puntos singulares.

www.FreeLibros.me

Pero como en el interior de Δ se cumple la desigualdad $X(x, y) < 0$, entonces el punto singular atrayente es necesariamente un nodo.

Hallando las pendientes de las direcciones excepcionales para el punto de silla, se puede ver que una de las rectas excepcionales pasa por Δ. De aquí se deduce que toda curva integral que sea tangente a esta recta en el punto de silla entra en el interior de Δ y desde allí debe alcanzar el nodo.

16. Sistema topográfico de curvas. Curvas de contacto

Como vimos en la sección anterior, en la integración cualitativa de ecuaciones diferenciales es de mucha utilidad el empleo de las curvas sin contacto. Sin embargo, debemos señalar que no existen métodos generales de construcción de semejantes curvas, es decir, no hay métodos que permitan construir curvas sin contacto en cada caso concreto. En vista de esto, el problema de la búsqueda de las curvas sin contacto posee un interés especial. Uno de los métodos existentes está relacionado con la elección y el uso adecuados de los sistemas topográficos de curvas.

Un *sistema topográfico de curvas* determinado por la ecuación $\Phi(x, y) = C$, donde C es un parámetro real, es una familia de curvas simples cerradas, disjuntas y derivables con continuidad, las cuales se abarcan unas a otras y llenan completamente cierta región G del plano de fase[15].

---

[15] En la literatura matemática existen otras definiciones de sistema topográfico que se diferencian en forma, pero no en contenido, de la definición dada aquí.

www.FreeLibros.me

Supongamos que el sistema topográfico se elige de tal manera que a cada valor del parámetro C le corresponde una única curva, y que la curva correspondiente a cierto valor de C contiene todas las curvas correspondientes a valores menores de C (o sea, al crecer C aumenta el "tamaño" de las curvas). Supongamos además que las curvas del sistema topográfico no tienen puntos singulares del sistema diferencial examinado. Consideremos ahora la función $\Phi(\varphi(t), \psi(t))$, donde $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ son las ecuaciones paramétricas de las trayectorias del sistema diferencial (122). Hallemos la derivada de Φ respecto a t. A partir del sistema (122) obtenemos

$$\frac{d\Phi(\varphi(t), \psi(t))}{dt} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} X(x, y) + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} Y(x, y).$$

Las curvas (en el caso dado, los ciclos) sin contacto son aquellas curvas del sistema topográfico en las que la derivada $\frac{d\Phi}{dt}$ tiene signo definido. Además, toda curva sin contacto del sistema topográfico que satisfaga la desigualdad $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ posee la propiedad de que, con el transcurso del tiempo t, toda trayectoria de fase que la corte sale de la región finita limitada por esta curva. En cambio, si $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, dichas trayectorias de fase entran en la región indicada. De aquí se deduce que si la derivada $\frac{d\Phi}{dt}$ tiene signo constante en cierta región anular (circular) llena completamente de curvas del sistema topográfico, entonces en esta región no pueden haber ni trayectorias cerradas ni, en particular, ciclos límites del sistema diferencial examinado. Los ciclos límites pueden existir únicamente en regiones circulares donde la derivada $\frac{d\Phi}{dt}$ es de signo variable.

www.FreeLibros.me

A modo de ejemplo examinemos el sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^3, \tag{184}$$

con un único punto singular (concretamente, un foco estable) en el punto $O(0,0)$. Elijamos como sistema topográfico de curvas la familia de circunferencias concéntricas con centro en el punto $O(0,0)$, es decir, la familia $x^2 + y^2 = C$, donde C es un parámetro positivo. Entonces,

$$\frac{d\Phi}{dt} = -2(x^2 + y^2) + 2(x^4 + y^4),$$

o, en coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$,

$$\frac{d\Phi}{dt} = -2r^2 + 2r^4\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) = -2r^2 + 2r^4\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta\right).$$

Dado que los valores máximo y mínimo de la expresión entre paréntesis son 1 y $\frac{1}{2}$, respectivamente, podemos concluir que si $r > \sqrt{2}$, el valor de la derivada $\frac{d\Phi}{dt}$ es mayor que cero, y si $r < 1$, entonces es menor que cero. De aquí, en virtud del criterio de Poincaré—Bendixson y cambiando t por $-t$ en el sistema (184), inferimos que en el anillo limitado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$ hay un único ciclo límite del sistema (184).

Para demostrar la unicidad, basta recurrir al *criterio de Dulac* para regiones doblemente conexas: *si existe una función* $B(x,y) > 0$ *continua junto con sus derivadas parciales y tal que en cierta región doblemente conexa* G *de la región de definición del sistema* (122)

www.FreeLibros.me

la función

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x}+\frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

es de signo constante, entonces en la región G no puede existir más de una curva simple cerrada formada por trayectorias del sistema (122) *y que contenga a la frontera interior de la región G.*

En el caso considerado aquí, tomando $B(x,y)\equiv 1$ para el sistema (184) obtenemos

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=3\left(x^2+y^2\right)-2$$

por lo que en el anillo de fronteras $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=2$, la expresión $3\left(x^2+y^2\right)-2$ conserva el signo. Teniendo presente el tipo de singularidad en $O(0,0)$, concluimos que el ciclo es un ciclo límite inestable.

Regresando al problema de la construcción de las curvas sin contacto para el caso general, veamos cómo utilizar de otra manera los sistemas topográficos. La base del nuevo método es el concepto de curva de contacto. Si la derivada $\frac{d\Phi}{dt}$ se anula en cierto conjunto de puntos del plano de fase, entonces dicho conjunto es el lugar geométrico de los puntos donde las trayectorias del sistema diferencial son tangentes a las curvas del sistema topográfico. De hecho, la pendiente de la tangente a la trayectoria del sistema diferencial es igual a $\frac{Y}{X}$, mientras que la pendiente de la tangente a la curva del sistema

www.FreeLibros.me

topográfico es $-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$. Por esto, cuando

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}X+\frac{\partial\Phi}{\partial y}Y=0, \tag{185}$$

estas pendientes coinciden, es decir,

$$\frac{Y}{X}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Se denomina *curva de contacto* al lugar geométrico de los puntos en los que las trayectorias del sistema diferencial (122) son tangentes a las curvas del sistema topográfico $\Phi(x,y)=C$. La ecuación (185) es la ecuación de la curva de contacto. Es especialmente interesante el caso cuando se logra elegir el sistema topográfico de tal manera que la curva de contacto, o alguna rama suya, es una curva simple cerrada, pues entonces el sistema topográfico posee curvas "máxima" y "mínima", a las cuales son tangentes la curva de contacto o la rama real suya (en la figura 98 la curva de contacto se indica con una línea discontinua). Si $\dfrac{d\Phi}{dt}\leqslant 0$ $\left(\dfrac{d\Phi}{dt}\geqslant 0\right)$ en la curva "máxima" $\Phi(x,y)=C_1$, y $\dfrac{d\Phi}{dt}\geqslant 0$ $\left(\dfrac{d\Phi}{dt}\leqslant 0\right)$ en la curva

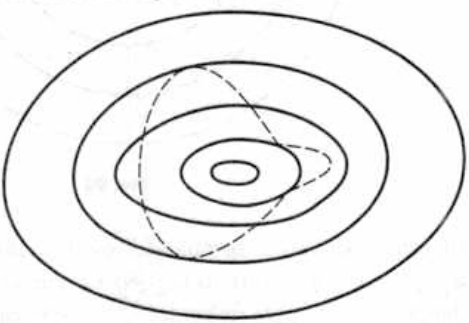

Fig. 98

www.FreeLibros.me

"mínima" $\Phi(x, y) = C_2$, entonces en la región circular acotada por las curvas indicadas existe al menos un ciclo límite del sistema diferencial analizado.

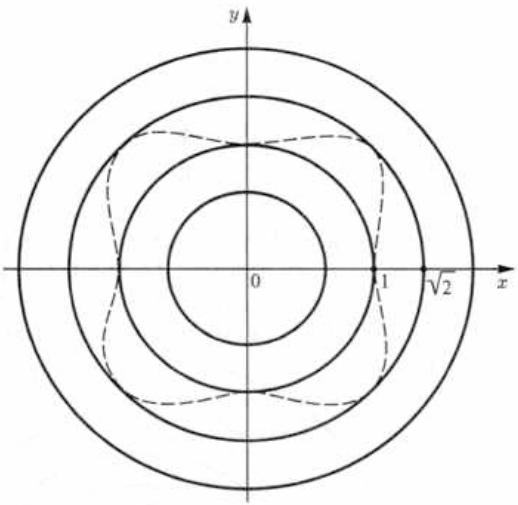

Fig. 99

De este modo, en el ejemplo del sistema (184) la curva de contacto $x^2+y^2 = x^4+y^4$ es cerrada (fig. 99). Las curvas "máxima" y "mínima" (tangentes a la curva de contacto) del sistema topográfico elegido se pueden hallar de la manera siguiente: como en coordenadas polares la ecuación de la curva de contacto es $r^2 = \dfrac{1}{\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta}$, entonces sus ecuaciones paramétricas son

$$x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta}}, \quad y = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta}}.$$

www.FreeLibros.me

Dado que los valores máximo y mínimo para r^2 son 2 y 1, respectivamente, concluimos que las curvas "máxima" y "mínima" del sistema topográfico $x^2 + y^2 = C$ son las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$. Como vimos antes, estas circunferencias forman el anillo que contiene al ciclo límite del sistema (184).

17. Divergencia del campo vectorial y ciclos límites

Al construir un sistema topográfico de curvas, en algunos casos se puede utilizar el segundo miembro del sistema (122). El sistema diferencial examinado puede ser tal que la ecuación

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \lambda, \tag{186}$$

donde λ es un parámetro real, proporciona el sistema topográfico de curvas.

Por ejemplo, para el sistema diferencial (184) la ecuación (186) toma la forma $3(x^2+y^2)-2 = \lambda$. Haciendo $\Lambda = \dfrac{\lambda+2}{3}$, donde $\lambda \in (-2, +\infty)$, obtenemos el sistema topográfico de curvas $x^2 + y^2 = \Lambda$ utilizado anteriormente.

Debemos destacar que si se tienen en cuenta las curvas "máxima" y "mínima", es decir, si la curva de contacto o alguna de sus ramas reales coincide con una de las curvas del sistema topográfico, entonces dicha curva es la trayectoria del sistema diferencial.

www.FreeLibros.me

Consideremos, por ejemplo, el sistema diferencial (173)

$$\frac{dx}{dt} = -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

Para este sistema

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 2 - 4\left(x^2 + y^2\right),$$

y la ecuación (186) toma la forma $2 - 4\left(x^2 + y^2\right) = \lambda$. Si ahora, en lugar del parámetro λ introducimos el parámetro $\Lambda = \dfrac{2-\lambda}{4}$, donde $\lambda \in (-\infty, 2)$, entonces la última ecuación, $x^2 + y^2 = \Lambda$, determina el sistema topográfico de curvas. En el caso dado, la curva de contacto es $\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right) = 0$ y, como vemos, su rama real $x^2+y^2 = 1$ coincide con una de las curvas del sistema topográfico. Esta rama, como se demostró en las páginas 198–199, es el ciclo límite del sistema (173).

Aunque los últimos dos ejemplos muestran casos particulares, la idea de la construcción del sistema topográfico de curvas mediante la divergencia nos puede proporcionar resultados más generales. Sin detenernos en estos resultados, mostremos como funciona en un ejemplo concreto. *Si el sistema diferencial* (122) *tiene un ciclo límite L, entonces existen una constante real λ y una función positiva $B(x, y)$ derivable con continuidad en el plano de fase, tales que*

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = \lambda$$

www.FreeLibros.me

es la ecuación de la curva con una rama real finita que coincide con el ciclo L.

Introduzcamos el concepto de ciclo límite divergente. Se llama *ciclo límite divergente* al ciclo límite del sistema diferencial (122) que coincide con la curva (186) o que es una rama real finita de ésta. De acuerdo con esta definición, mediante un cambio apropiado de la velocidad de recorrido de los puntos imagen a lo largo de las trayectorias del sistema diferencial examinado, siempre se puede lograr que un ciclo límite cualquiera del sistema (122) sea un ciclo divergente del sistema modificado.

Examinemos, por ejemplo, el sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 2x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x^3 + x^2y - xy^2,$$

con ciclo límite $x^2 + y^2 = 1$.

La divergencia del campo vectorial de este sistema es

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 2 - 5x^2 - 3y^2.$$

Se puede comprobar que la ecuación $2 - 5x^2 - 3y^2 = \lambda$ no es una trayectoria del sistema diferencial inicial para ningún λ real. A su vez, si consideramos la función $B(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2 + 3$, entonces

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(-23x^2 + 16xy - 25y^2 - 20\right) - 14$$

www.FreeLibros.me

y la ecuación

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = -14$$

proporciona la curva cuya rama real finita $x^2 + y^2 - 1 = 0$ es el ciclo límite. Evidentemente, el ciclo límite obtenido es un ciclo límite divergente del sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \left(2x - 2x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3\right)\left(3x^2 - 4xy + 7y^2 + 3\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(-x^3 + x^2y - xy^2\right)\left(3x^2 - 4xy + 7y^2 + 3\right).$$

En general, la función B (positiva y derivable con continuidad) no es la única posible. Por ejemplo, en el último ejercicio se puede tomar como función B (además de $B(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2 + 3$) el polinomio

$$B(x, y) = \frac{23x^2 - 20xy + 43y^2 + 7}{7};$$

entonces,

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} =$$
$$= \frac{1}{7}\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(-187x^2 + 80xy - 149y^2 - 84\right) - 10.$$

La ecuación

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = -10$$

www.FreeLibros.me

representa la curva cuya rama $x^2 + y^2 - 1 = 0$ es un ciclo límite del sistema diferencial (ciclo límite divergente del sistema diferencial modificado).

Para concluir, señalemos que durante el estudio de modelos diferenciales concretos, frecuentemente surge la necesidad de aplicar métodos que no han sido tratados en el presente libro. Todo depende del nivel de complejidad del modelo diferencial, de cuán desarrollado está el aparato matemático respectivo y, por supuesto, de la erudición y experiencia del investigador.

www.FreeLibros.me

Apéndice

Derivadas de las funciones elementales

Función	Derivada
C (constante)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

www.FreeLibros.me

Función	Derivada
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$
$\sec x$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$
$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x \csc x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

www.FreeLibros.me

Función	Derivada
arctg x	$\dfrac{1}{1+x^2}$
arcctg x	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
arcsec x	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
arccsc x	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
sh x	ch x
ch x	sh x
th x	$\dfrac{1}{\text{ch}^2\, x}$
cth x	$-\dfrac{1}{\text{sh}^2\, x}$
Arcsh x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Arcch x	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Arcth x	$\dfrac{1}{1-x^2}$
Arccth x	$-\dfrac{1}{1-x^2}$

www.FreeLibros.me

Integrales básicas

Funciones potenciales

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

Funciones trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x|$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\operatorname{sen} x|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

Funciones racionales

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (|x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arccth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (|x| > a)$$

www.FreeLibros.me

Funciones exponenciales

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

Funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln |\operatorname{ch} x|$$

$$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x|$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

Funciones irracionales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{Arcsh} \frac{x}{a} = \ln |(x + \sqrt{x^2 + a^2})|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arcch} \frac{x}{a} = \ln |(x + \sqrt{x^2 - a^2})|$$

www.FreeLibros.me

Índice de materias

Amortiguamiento crítico 167
— de oscilaciones 168
ángulo de retraso 107

Base del arco de una cicloide 68
Bendixson, criterio 202
Bendixson—Poincaré, 200
braquistocrona 73

Cálculo de variaciones 74
campo direccional 120
centro 147
ciclo límite 199
— — divergente 225
— — estable 199
— — inestable 200
— — semiestable 200
cicloide 67
círculo generador 67
clepsidra 26
coeficiente de convalecencia 41
— de morbilidad 41
coeficientes de potencia de artillería 54
concentración de una sustancia 31
condición inicial 126
constante de gravitación universal 89
coordenada homogénea 184
criterio de Bendixson 202
— de Dulac 202, 219
— de Poincaré—Bendixson 200
curva de contacto 221
— isócrona 69
— isotérmica 15
— sin contacto 215
— tautocrona 69

Diámetro hidráulico 173
dirección 120
— excepcional 163
divergencia 162
dominio normal de Frommer 179
— — de primer tipo 179
— — de segundo tipo 179
— — de primer tipo 179
Dulac, criterio 202, 219

Ecuación característica 163
— de continuidad 171, 188

www.FreeLibros.me

— de la curva logística 28
— de Van der Pol 209
eficacia territorial 55
estabilidad orbital 155
estado de gravedad cero 87
— de ingravidez 87
— estable 151
— inestable 151

Fermat, principio del tiempo mínimo 75
flexión de una viga 102
flujo estacionario de calor 14
foco 149
Fourier, ley de conducción de calor 15
Frommer, dominio normal 179
fuerza resistente 140
— restauradora 140
función de Liapunov 158
— de signo negativo 157
— — positivo 157
— definida negativa 157
— — positiva 157
— energética del sistema 158

Galileo, teorema 68
índice de un punto singular 203, 204
— de una curva cerrada 204

Integral elíptica de primera especie 66
— — de segunda especie 66
isoclina 120

Jacobiano 161

Kepler, leyes 94

Ley de acción de masas 31
— de conducción de calor de Fourier 15
— de gravitación universal 89
— de la oferta y la demanda 29
— de las áreas 94
leyes de Kepler 94
Liapunov, función 158
—, método directo 156
—, solución estable 154
—, — no estable 155
línea de sonido 174
— elástica 100

Método de aproximaciones sucesivas de Newton 21
— directo de Liapunov 156
modelo cuadrático de combate 55
— depredador—presa 34
— lineal de combate 59
— parabólico de combate 61

Newton, método de aproximaciones sucesivas 21
nodo 149

www.FreeLibros.me

número de Mach 173
— de Reynolds 171

Oscilador de Van der Pol 207

Péndulo cicloidal 71
plano de estados 135
— de fase 135
— proyectivo 185
Poincaré—Bendixson, criterio 200
principio de Fermat del tiempo mínimo 75
problema de contorno 33
— de valores iniciales 126
producto de una reacción 31
punto de equilibrio 137
— de inflexión 122
— de reposo 137
— de retroceso 68
— de silla 147
— imagen 135
— singular 137
— — aislado 137
— — asintóticamente estable 152
— — estable 151
— — grosero 150
— — inestable 152
— — simple 161

Recta excepcional 164
— impropia 186
— regular 178
— singular 178
resorte lineal 140
retrato de fase 139
rigidez flexural 103

Separatriz 124, 146
sistema conservativo 140
— diferencial autónomo 136
— — con ley hiperbólica 56
— estacionario 136
— no autónomo 136
— no estacionario 136
— topográfico de curvas 217
solución estable según Liapunov 154
— no estable según Liapunov 155
superficie isotérmica 14, 15

Tasa de mortalidad 35
— de natalidad 35
tendencia del precio 29
teorema de Galileo 68
— de Wren 68
trayectoria de fase 135

Van der Pol, ecuación 209
velocidad areolar 93
— de fase 135
— de reacción 31
vértice de una cicloide 68
viga de consola 101

Wren, teorema 68

www.FreeLibros.me

EDITORIAL URSS

DE RECIENTE EDICIÓN

Rozendórn

Problemas de geometría diferencial

Este libro contiene una colección de problemas de alto nivel, relacionados con los principales temas que componen un curso completo de geometría diferencial. Al resolver los problemas planteados, el lector habrá efectuado un recorrido minucioso por la geometría diferencial y de las curvas espaciales y de las superficies. En los problemas se tocan aspectos de la geometría diferencial que tienen innumerables aplicaciones en la física y en la ingeniería. Este libro fue autorizado por el Ministerio de Educación Media y Superior de la URSS para su uso en las facultades de física y de matemáticas.

Dubrovin, Fomenko, Nóvikov

Geometría moderna (primer y segundo tomo)

En este libro se abarcan los siguientes temas: geometría del espacio euclídeo, del espacio de Minkowski, y de sus respectivos grupos de transformaciones; geometría clásica de curvas y superficies; análisis tensorial y geometría de Riemann; cálculo variacional y teoría del campo; fundamentos de teoría de la relatividad; geometría y topología de variedades, y, más concretamente, elementos de la teoría de homotopías y de la teoría de los espacios fibrados y algunas de sus aplicaciones, en particular, a la teoría de los campos de gauge.

Samarski, Vabischévich, Samárskaya

Métodos numéricos. Guía de resolución de problemas

La presente guía práctica de estudio pretende ser un complemento de los cursos de métodos numéricos que se imparten en las instituciones de educación superior con un programa de matemáticas de nivel elevado. Los problemas y ejercicios abarcan los temas principales del análisis matemático: interpolación, integración numérica, métodos directos e iterativos del álgebra lineal, problemas espectrales, sistemas de ecuaciones no lineales, problemas de minimización de funciones, ecuaciones integrales, problemas de contorno y de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. En cada sección se expone brevemente el material teórico necesario, ejercicios resueltos y una colección de ejercicios propuestos.

Shapukov

Grupos y álgebras de Lie en ejercicios y problemas

Este libro ayudará al lector a familiarizarse con los grupos y álgebras de Lie, disciplinas que presentan un gran interés tanto para matemáticos como para físicos. El material del libro abarca todas las ramas fundamentales de los grupos y álgebras de Lie: representaciones lineales de los grupos y álgebras de Lie, homomorfismos de los grupos y álgebras de Lie, formas invariantes, espacios homogéneos, órbitas, grupos de Lie de transformaciones de variedades diferenciables, etc. La exposición teórica viene acompañada de una gran cantidad de ejemplos resueltos.

Liashkó, Boiarchuk, Gai, Golovach

"AntiDemidóvich": Matemática superior. Problemas resueltos. T. 1–10.

Esta serie consta de diez volúmenes y contiene más de 2800 problemas resueltos de las más variadas ramas de las matemáticas superiores. Los cuatro primeros tomos, con los que se abre esta obra, están dedicados al estudio práctico de las funciones, las sucesiones, las series, el cálculo diferencial e integral de las funciones de una y varias variables; en ellos se presentan soluciones completamente detalladas de problemas expuestos en el famoso libro de B. P. Demidóvich.

Krasnov, Kiseliov, Makárenko, Shikin, Zaliapin

CMSI: Curso de matemáticas superiores (nueva edición, modificada y ampliada).

La primera edición de este libro vio la luz en editorial MIR en dos tomos y simultáneamente en tres idiomas (español, inglés y francés) a comienzos de los años 90. Desde ese momento, este libro ha conquistado un lugar destacado entre los libros de texto de matemáticas superiores en los países de habla hispana. Paradójicamente, el original en ruso no fue editado por una sencilla razón: en diciembre del 1991 la Unión Soviética fue liquidada en contra del deseo popular expresado en referéndum en la primavera de ese mismo año. La edición rusa (reelaborada y muy notablemente ampliada) fue publicada por editorial URSS en el año 2000. En el año 1999 este libro fue premiado en el concurso "Nuevos libros de texto" organizado por el Ministerio de Educación de Rusia con la consiguiente recomendación oficial para ser usado como tal en todos los centros de educación superior.

En comparación con la anterior edición española, la obra no sólo ha sido reelaborada sino que ha sido completada con ramas tan importantes como: teoría de probabilidades, estadística matemática, teoría de juegos, control óptimo, matemáticas discretas, métodos numéricos, etc.

www.FreeLibros.me

Pietrásheñ, Trífonov — *Teoría de grupos y su aplicación a la mecánica cuántica*

En este libro se exponen los fundamentos de la teoría de los grupos finitos e infinitos; el uso de la teoría de las representaciones de grupos se ilustra tomando como ejemplo diversas aplicaciones y cuestiones referentes a la mecánica cuántica: teoría de los átomos, química cuántica, teoría del estado sólido y mecánica cuántica relativista.

Surdín — *Formación estelar*

Comenzando con una breve excursión histórica a través del desarrollo de las ideas sobre el origen de las estrellas, el libro presenta un punto de vista moderno de la estructura y la dinámica del medio interestelar donde se forman las estrellas. Se describen los procesos fundamentales que llevan al nacimiento de estrellas, sistemas y asociaciones estelares, así como agregados estelares de distintos tipos.

Jlópov — *El universo y la búsqueda de la teoría unificada del campo*

Este libro está dedicado a las más palpitantes cuestiones situadas a caballo entre la astrofísica y la física de las partículas elementales. Se discuten hipótesis y posibles variantes de obtención de información sobre las partículas elementales a partir de datos astrofísicos.

Chernín — *La naturaleza física de las estrellas*

Los pulsares, los bursters, la fuente asombrosa SS433, las coronas galácticas, los cuásares, la radiación de fondo, los agujeros negros... Éstos son los temas fundamentales que abarca el presente libro. Se describen los procesos físicos que determinan los fenómenos astronómicos observados, se analizan las nuevas hipótesis y modelos, y se profundiza en los misterios de la astrofísica que siguen inquietando la imaginación del hombre.

Lipunov — *Estrellas de neutrones*

El libro es una introducción completa a la física de la evolución de las estrellas de neutrones, una de las ramas de la astrofísica que en la actualidad se desarrolla con más ímpetu. Se hace un recuento histórico de los descubrimientos y se explican todos los fenómenos observados. El análisis se expone de una manera amena, utilizando los conocimientos básicos de matemáticas y física.

Lipunov — *El mundo de las estrellas dobles*

En el libro se describen los nuevos descubrimientos, ideas e hipótesis relacionados con el estudio de las estrellas dobles. La secuencia de la exposición corresponde a los estadios sucesivos de evolución de las estrellas dobles. Pero en la descripción de cada etapa siempre se analiza un sistema doble concreto y se cuenta la historia de su descubrimiento e investigación, revelándose en cada ejemplo la esencia de los métodos astrofísicos de investigación de los sistemas dobles.

Logunov — *Curso de teoría de la relatividad y de la gravitación*

En este libro, siguiendo las ideas de Minkowski, se ha demostrado que la esencia y el contenido principal de la teoría de la relatividad radican en la unidad conceptual del espacio-tiempo, la geometría del cual es seudoeuclídea. Dentro de los límites de la teoría de la relatividad y del principio de geometrización se ha construido unívocamente la teoría relativista de la gravitación, la cual explica todos los experimentos gravitatorios llevados a cabo hasta la actualidad y proporciona ideas básicamente nuevas sobre el desarrollo del universo y el colapso gravitatorio.

Gantmájer — *Mecánica analítica*

El material de este libro presenta la siguiente estructura: exposición de los principios más generales de la mecánica, deducción a partir de ellos de las ecuaciones diferenciales de movimiento e investigación de éstas y de sus métodos de integración. El rigor de las deducciones de los principales momentos de la mecánica analítica y el laconismo del texto se conjugan magistralmente con la extrema claridad de la exposición.

Batiguin, Toptiguin — *Problemas de electrodinámica y teoría especial de la relatividad*

Este libro, una de las más completas colecciones de problemas de electrodinámica y de la teoría especial de la relatividad, está pensado tanto para los estudiantes universitarios como para los de centros técnicos superiores. Todos los problemas están detalladamente resueltos. En cada sección se anteponen breves introducciones teóricas y se exponen los métodos de resolución de los problemas que se enuncian a continuación. Se presta especial atención al aparato matemático. Esta obra, ya clásica, publicada reiteradas veces en ruso (original) y en inglés, aparece por primera vez en español.

www.FreeLibros.me

Bielokúrov, Shirkov

Guía de la teoría cuántica de campos

El elemento clave de la física contemporánea es el concepto de campo cuántico. Hoy en día se considera que éste constituye la forma universal de la materia que subyace a todas sus manifestaciones físicas. Este libro puede ser recomendado como una primera lectura para aquellos estudiantes y físicos de otras especialidades que quieran comprender las ideas y métodos más importantes de la teoría cuántica del campo, una de las ramas más matematizadas y abstractas de la física teórica.

Faddéev, Slavnov

Introducción a la teoría cuántica de los campos de gauge

En este libro de los prominentes físicos soviéticos se expone, por una parte, el método general de la cuantificación de las teorías invariantes de gauge en términos de la integral funcional, y, por otra, su renormalización. Se analizan también la formulación de las teorías de gauge reticulares y los métodos explícitamente covariantes de cuantificación (cuantificación BRS).

Matviéev, Petersón, Zhúkariev

Problemas resueltos de física general para los más inquietos

Este libro constituye una completa colección de problemas detalladamente resueltos que fueron propuestos a los alumnos más avanzados de los primeros cursos de la facultad de física de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú en seminarios especiales. Los problemas abarcan las siguientes disciplinas: mecánica, física estadística, termodinámica, electricidad, magnetismo y óptica. Además de problemas completamente originales se han incluido también los problemas más característicos y difíciles que se proponen generalmente en el curso de física general.

Ósipov

Autoorganización y caos

En este libro se describe de forma amena una de las nuevas ramas de la termodinámica fenomenológica: la termodinámica de los procesos irreversibles. Tras una breve introducción a la dinámica de los procesos de equilibrio, el autor expone detalladamente los postulados fundamentales de la termodinámica del desequilibrio. Se presta una atención especial a los efectos de la termodinámica no lineal, a la autoorganización en los sistemas de desequilibrio, todo lo cual se ilustra con ejemplos de la hidrodinámica, la física de los láseres y la cinética química.

Shepeliov

Óptica

Este libro ha sido preparado por el profesor A. V. Shepeliov partiendo de su extensa experiencia pedagógica en los centros de enseñanza superior. El libro abarca todo el programa de "Óptica" del curso de física general para estudiantes de enseñanza superior. Los temas están divididos por secciones y terminan con un resumen. Esto facilita el trabajo regular con el libro y ayuda a la preparación rápida para los exámenes.

Shepeliov

Electricidad y magnetismo

Este libro abarca casi todo el programa de "Electricidad y magnetismo" del curso de física general para estudiantes de enseñanza superior, lo cual se ha logrado gracias a la exposición concisa, pero exacta, del material. Los conocimientos matemáticos necesarios para la comprensión del libro son los del nivel escolar, incluyendo los elementos del cálculo diferencial e integral.
Los temas están divididos por secciones y terminan con un resumen. Esto facilita el trabajo regular con el libro y ayuda a la preparación rápida para los exámenes.

Tarásov, Tarásova

Preguntas y problemas de física

Los autores de este libro han sabido, en la forma más expresiva del diálogo, analizar profundamente casi todas las preguntas del programa y en especial aquellas que son de difícil comprensión. En el libro se hace un análisis detallado de los errores más característicos que cometen los estudiantes. El texto ha sido escrito de manera singular, sencilla y amena, las preguntas difíciles se discuten desde diferentes puntos de vista, los dibujos bien detallados (que en el libro son numerosos) ayudan a comprender más profundamente la idea de los autores.

Baskákov

Teoría de circuitos

En el presente libro se expone sistemáticamente el material del curso «Fundamentos de la teoría de circuitos». Se estudian los métodos de análisis de los regímenes armónicos estacionarios de los circuitos lineales, la teoría de los cuadripolos, las características de los filtros, los fundamentos de la teoría de circuitos no lineales. Se lleva a cabo un estudio detallado de los métodos para hallar las reacciones de los sistemas lineales a los impulsos. En el libro también se presenta la teoría de los circuitos con parámetros distribuidos, y se discuten los métodos de síntesis de los dipolos lineales. El último capítulo está dedicado a la aplicación de los ordenadores al cálculo de circuitos complejos.

www.FreeLibros.me

Kirílov y otros — *Resolución de problemas de física*

El libro está escrito en correspondencia con el programa del curso de física general. En el libro se incluyen problemas resueltos de fundamentos físicos de la mecánica, termodinámica y física molecular, electricidad y magnetismo, oscilaciones y ondas, óptica, teoría especial de la relatividad y física cuántica.

Feodósiev — *Problemas de resistencia de materiales*

Esta monografía contiene una colección de problemas seleccionadas de alto nivel detalladamente resueltos, los cuales proporcionarán al lector, sin duda alguna, la posibilidad de ampliar su conocimiento sobre la ciencia de la resistencia de materiales y mejorar su comprensión en lo que respecta a la relación existente entre dicha disciplina y varias otras.

DE PRÓXIMA EDICIÓN: FÍSICA

- Sazhin — Introducción a la cosmología moderna
- Surdín — Problemas resueltos de astronomía
- Tiernov y otros — Campos de gauge
- Bólojov — Grupos de simetría y partículas elementales
- Vizguin — Teorías de campo unificado en el primer tercio del siglo XX
- Ivanenko — Gravitación
- Galtsov, Grats, Zhukovski — Campos clásicos: teoría general, campos electromagnéticos, campos de Yang—Mills y campos gravitatorios
- Galitski y otros — Problemas resueltos de mecánica cuántica
- Kvásnikov — Termodinámica y mecánica estadística. Procesos reversibles e irreversibles. Teoría y problemas resueltos (2 tomos)
- Baskákov — Señales y circuitos
- Denísov — Electrodinámica de los medios continuos
- Lipunov — Problemas resueltos de astrofísica
- Shvilkin y otros — Problemas resueltos de electrónica física
- Zviaguin y otros — Problemas resueltos de teoría de semiconductores
- Bogoliúbov, Shirkov — Campos cuánticos
- Jlópov — Cosmomicrofísica
- Chernín — Física del tiempo
- Chernín — Rotación de las galaxias
- Kulikovski — Manual del astrónomo
- Kononóvich y Moroz — Curso de astronomía general
- Vilf — Sobre el espín, la fórmula de Einstein y la ecuación relativista de Dirac
- Kondrátiev, Románov — Problemas resueltos de mecánica estadística
- Dmítriev — El baul del abuelo
- Rozental — Geometría. Dinámica. Universo
- Fridman — El mundo como espacio-tiempo

www.FreeLibros.me

- Shelepin — Lejos del equilibrio
- Shelepin — Coherencia
- Guriévich, Chernín — El origen de las galaxias y las estrellas
- Matviéev y otros — Problemas resueltos de óptica
- Kuzmín, Shvilkin — Síntesis nuclear fría
- Matviéev y otros — Problemas resueltos de mecánica
- Frenkel — De la desintegración α a la Gran Explosión
- Jeller — En los orígenes de la cosmología: Fridman y Lemetre
- Jlópov — Cosmomicrofísica

DE PRÓXIMA EDICIÓN: MATEMÁTICA

- Krasnov y otros — Ecuaciones integrales
- Krasnov y otros — Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- Krasnov y otros — Funciones de varible compleja. Cálculo operacional. Teoría de la estabilidad
- Krasnov y otros — Análisis vectorial
- Krasnov y otros — Cálculo variacional
- Ríbnikov — Historia de las matemáticas (nueva edición completamente modificada)
- Dubrovin, Fomenko, Nóvikov — Geometría moderna. Métodos y aplicaciones. Tomo 3: Método de la teoría de las homologías
- Samarski, Vabischévich — Métodos numéricos para la resolución de problemas de convección–difusión
- Kubyshin — Geometría diferencial, álgebras de Lie y sus aplicaciones

Sus opiniones, sugerencias y proposiciones pueden ser enviadas a:

Rusia, 117312 Moscú
Instituto de Análisis de Sistemas
de la Academia de Ciencias de Rusia
Prospiekt 60-letia Octiabriá, 9; k. 203

Editorial URSS
e-mail: URSS@URSS.ru
http://URSS.ru

o bien a nuestro distribuidor exclusivo en España:

España, 41010-Sevilla
C/ Salado, 18

Librería Hayka
e-mail: hayka@supercable.es
fax: 34-954-08-47-04
tlf.: 34-625-37-87-73

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

42 ID 15570
9 785354 004430 >

http://URSS.ru
e-mail: URSS@URSS.ru
www.FreeLibros.me